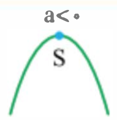
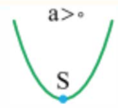
۱ برد تابع درجه‌دوم $f(x)=ax^{۲}-۴x+۲a$ برابر $(-\infty,a]$ است. با برداشتن نقطه‌ای با کدام طول از دامنهٔ این تابع، برد آن تغییر می‌کند؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $-۲\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس‌نامه برد تابع $y=ax^{۲}+bx+c$

$a<۰$	$a>۰$
 	
$S(-\frac{b}{۲a},\frac{-\Delta}{۴a})$	$S(-\frac{b}{۲a},\frac{-\Delta}{۴a})$
برد $=(-\infty,\frac{-\Delta}{۴a}]$	برد $=[\frac{-\Delta}{۴a},+\infty)$
$\Delta=b^{۲}-۴ac$	$\Delta=b^{۲}-۴ac$

توجه در یک تابع درجه‌دوم، تنها با حذف نقطهٔ رأس سهمی، برد تابع تغییر می‌کند.

پاسخ تشریحی **گام اول**: برد تابع $(-\infty,a]$ است؛ پس دهانهٔ سهمی رو به پایین باز می‌شود و ضریب $x^{۲}$ منفی است $(a<۰)$.

گام دوم: عرض رأس سهمی برابر با a است:

$$\text{عرض رأس سهمی}=a\Rightarrow\frac{-\Delta}{۴a}=a\Rightarrow\frac{۴a(۲a)-(-۴)^{۲}}{۴a}=a\Rightarrow ۸a^{۲}-۱۶=۴a^{۲}\Rightarrow ۴a^{۲}=۱۶$$

$$\Rightarrow a^{۲}=۴\xrightarrow{a<۰}a=-۲\Rightarrow f(x)=-۲x^{۲}-۴x-۴$$

گام سوم: فقط با برداشتن رأس سهمی، برد تابع تغییر می‌کند؛ پس خواستهٔ سؤال، طول رأس سهمی است: $x_S=-\frac{b}{۲a}=-\frac{-۴}{۲(-۲)}=-۱$

۲ اگر $f(x-\frac{۱}{x})=x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}-۴$ و $f(\alpha)=۳$، حاصل‌ضرب مقادیر قابل قبول α کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) -۳ ۴) -۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

خودت حل کنی بهتره از تغییر متغیر $\alpha=x-\frac{۱}{x}$ استفاده کنید.

پاسخ تشریحی **گام اول**: از تغییر متغیر $\alpha=x-\frac{۱}{x}$ استفاده می‌کنیم و سعی می‌کنیم عبارت $x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}-۴$ را برحسب α بنویسیم.

$$\alpha=x-\frac{۱}{x}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}\alpha^{۲}=x^{۲}-۲x\times\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x^{۲}}\Rightarrow\alpha^{۲}=x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}-۲\xrightarrow{-۲}\alpha^{۲}-۲=x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}-۴$$

گام دوم: با جای‌گذاری عبارت به دست آمده از گام اول در ضابطهٔ $f(x-\frac{۱}{x})=x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}-۴$، داریم:

$$f(\alpha)=\alpha^{۲}-۲$$

گام سوم: معادلهٔ $f(\alpha)=۳$ را حل می‌کنیم تا مقادیر قابل قبول برای α را پیدا کنیم:

$$f(\alpha)=۳\Rightarrow\alpha^{۲}-۲=۳\Rightarrow\alpha^{۲}=۵\Rightarrow\alpha=\pm\sqrt{۵}\Rightarrow\text{حاصل‌ضرب مقادیر }\alpha=-۵$$

۳ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x(x+1)=1$ باشند، ریشه‌های کدام معادله $\frac{\alpha}{\alpha^2+2\alpha+2}$ و $\frac{\beta}{\beta^2+2\beta+2}$ هستند؟

۱) $2x(x+1)=1$ ۲) $3x(x+1)=1$ ۳) $4x(x+1)=1$ ۴) $5x(x+1)=1$

پاسخ: گزینهٔ ۴

خودت حل کنی بهتره $\alpha^2+\alpha=1$ و $\beta^2+\beta=1$ است. ریشه‌های معادلهٔ جدید را ساده‌تر کنید.

درس‌نامه در معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2+bx+c=0$ با شرط $\Delta>0$ داریم:

$$\underbrace{\text{اختلاف ریشه‌ها}}_{|x_1-x_2|}:\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \qquad \underbrace{\text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها}}_{x_1x_2}:P=\frac{c}{a} \qquad \underbrace{\text{مجموع ریشه‌ها}}_{x_1+x_2}:S=-\frac{b}{a}$$

تذکر اگر بخواهیم معادلهٔ درجه‌دومی بنویسیم که ریشه‌های آن x_1 و x_2 باشند، ابتدا $S=x_1+x_2$ و $P=x_1x_2$ را به دست آورده و سپس معادله را به فرم $x^2-Sx+P=0$ یا هر ضریب غیرصفری از آن یعنی $k(x^2-Sx+P)=0$ می‌نویسیم.

پاسخ تشریحی **گام اول:** α و β ریشه‌های معادله هستند؛ پس در آن صدق می‌کنند.

$$x(x+1)=1 \Rightarrow x^2+x=1 \xrightarrow[x=\beta]{x=\alpha} \begin{cases}\alpha^2+\alpha=1 & (1)\\ \beta^2+\beta=1 & (2)\end{cases}$$

گام دوم: می‌خواهیم معادله‌ای بنویسیم که ریشه‌های آن $\frac{\alpha}{\alpha^2+2\alpha+2}$ و $\frac{\beta}{\beta^2+2\beta+2}$ باشند. ابتدا این ریشه‌ها را با توجه به تساوی‌های (۱) و (۲) کمی ساده‌تر می‌کنیم.

$$\frac{\alpha}{\alpha^2+2\alpha+2}=\frac{\alpha}{\underbrace{\alpha^2+\alpha}_{1}+\alpha+2}=\frac{\alpha}{\alpha+3} \quad , \quad \frac{\beta}{\beta^2+2\beta+2}=\frac{\beta}{\underbrace{\beta^2+\beta}_{1}+\beta+2}=\frac{\beta}{\beta+3}$$

گام سوم: مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ جدید را بر حسب α و β می‌نویسیم. (S و P مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $x(x+1)=1$ هستند.)

$$S'=\frac{\alpha}{\alpha+3}+\frac{\beta}{\beta+3}=\frac{\alpha\beta+3\alpha+\alpha\beta+3\beta}{\alpha\beta+3\alpha+3\beta+9}=\frac{2\overbrace{\alpha\beta}^{P}+3\overbrace{(\alpha+\beta)}^{S}}{\underbrace{\alpha\beta}_{P}+3\underbrace{(\alpha+\beta)}_{S}+9}=\frac{2P+3S}{P+3S+9} \qquad (3)$$

$$P'=\frac{\alpha}{\alpha+3}\times\frac{\beta}{\beta+3}=\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta+3\alpha+3\beta+9}=\frac{\overbrace{\alpha\beta}^{P}}{\underbrace{\alpha\beta}_{P}+3\underbrace{(\alpha+\beta)}_{S}+9}=\frac{P}{P+3S+9} \qquad (4)$$

گام چهارم: مقادیر S و P را از معادلهٔ اولیه به دست می‌آوریم.

$$x^2+x-1=0$$

$$S=-\frac{b}{a}=-1 \quad , \quad P=\frac{c}{a}=-1$$

گام پنجم: با جای‌گذاری مقادیر S و P در عبارت‌های (۳) و (۴)، مقادیر S' و P' را حساب می‌کنیم.

$$S'=\frac{2(-1)+3(-1)}{-1+3(-1)+9}=\frac{-5}{5}=-1 \quad , \quad P'=\frac{-1}{-1+3(-1)+9}=\frac{-1}{5}$$

گام ششم: معادلهٔ درجه‌دوم که مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های آن به ترتیب S' و P' باشد را می‌توان به صورت $x^2-S'x+P'=0$ نوشت:

$$x^2-(-1)x-\frac{1}{5}=0 \Rightarrow x^2+x-\frac{1}{5}=0 \Rightarrow x^2+x=\frac{1}{5} \Rightarrow 5x(x+1)=1$$

۴ به ازای چند مقدار m، معادلهٔ $۳x^۴ - mx^۲ + m^۲ = ۱$، سه جواب متمایز دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۱

خودت حل کنی بهتره از تغییر متغیر $t = x^۲$ استفاده کنید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** با تغییر متغیر $t = x^۲ (t \geq ۰)$ به معادلهٔ درجه‌دوم $\underbrace{۳t^۲ - mt + m^۲ - ۱ = ۰}_{(*)}$ می‌رسیم.

گام دوم: برای آن‌که معادلهٔ اصلی، ۳ جواب متمایز داشته باشد، باید یکی از جواب‌های معادلهٔ (*) مثبت و دیگری صفر باشد. از جواب مثبت دو مقدار برای x و از جواب صفر، فقط یک مقدار برای x حاصل می‌شود. جواب $t = ۰$ را در معادلهٔ (*) قرار می‌دهیم تا m به دست آید.

$$t = ۰ \Rightarrow ۳(۰)^۲ - m(۰) + m^۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow m^۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow m^۲ = ۱ \Rightarrow m = \pm ۱$$

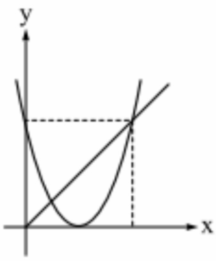
گام سوم: حالا مقادیر به دست آمده برای m را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم و ریشه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$m = ۱ \text{ اگر}: ۳t^۲ - t = ۰ \Rightarrow t(۳t - ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۰ \\ t = \frac{۱}{۳} \end{cases}$$

$$m = -۱ \text{ اگر}: ۳t^۲ + t = ۰ \Rightarrow t(۳t + ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۰ \\ t = -\frac{۱}{۳} \ \text{غ.ق.ق} \ (t \geq ۰) \end{cases}$$

پس تنها مقدار قابل قبول برای m برابر با یک است.

۵ سهمی به معادلهٔ $y = x^۲ + ax + ۲b$ و نیمساز ناحیهٔ اول، مطابق شکل، در یک دستگاه مختصات رسم شده‌اند. حاصل $b - a$ کدام است؟

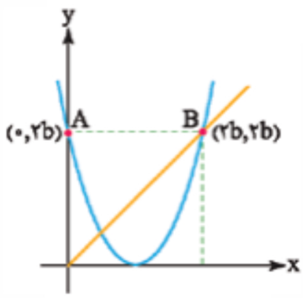


۱) ۸
۲) ۶
۳) ۴
۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۲

خودت حل کنی بهتره سهمی بر محور xها مماس است، معادلهٔ آن را پارامتری بنویسید. از برابر بودن عرض نقطهٔ تقاطع با خط $y = x$ با عرض از مبدأ سهمی استفاده کنید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** مطابق شکل زیر، عرض نقطهٔ A با قراردادن $x = ۰$ در تابع به دست می‌آید.



$$y = x^۲ + ax + ۲b \xrightarrow{x=۰} y_A = ۲b$$

گام دوم: عرض نقطهٔ B با عرض نقطهٔ A برابر است $(y_B = ۲b)$ و چون این نقطه روی خط $y = x$ قرار دارد؛ پس مختصات آن $(۲b\,,۲b)$ است.

گام سوم: دو نقطهٔ A و B عرض برابر دارند؛ پس میانگین طول‌های آن‌ها برابر با طول رأس سهمی است.

رأس سهمی: $(\frac{۰+۲b}{۲},۰)=(b,۰)$

گام چهارم: معادلهٔ سهمی‌ای که رأس آن $(b,۰)$ است برابر با $y=k(x-b)^۲$ است و چون طبق صورت سؤال ضریب $x^۲$ باید یک باشد؛ پس $y=(x-b)^۲$ است.

گام پنجم: ضابطهٔ به دست آمده را با ضابطهٔ صورت سؤال برابر قرار می‌دهیم:

$$(x-b)^۲ = x^۲+ax+۲b \Rightarrow x^۲-۲bx+b^۲ = x^۲+ax+۲b \Rightarrow \begin{cases} b^۲=۲b \xrightarrow{b\neq ۰} b=۲ \\ a=-۲b \Rightarrow a=-۴ \end{cases}$$

گام ششم: خواستهٔ سؤال $b-a=۲-(-۴)=۶$ است.

۶ به ازای دو مقدار حقیقی k، معادلهٔ $\frac{۲}{x^۲-۴x+۳}=\frac{k}{x-۳}+\frac{۲x-۳}{x-۱}$ جواب ندارد. میانگین این دو مقدار کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی/ محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

به نظرت معادلات گویا و رادیکالی چه زمانی جواب ندارن؟!

معادلات گویا زمانی جوابی ندارند که تمام جواب‌های به دست آمده، ریشه‌های مخرج باشند.

معادلات رادیکالی زمانی جواب ندارند که تمام جواب‌های به دست آمده، حداقل زیر یکی از رادیکال‌ها را منفی کند.

پاسخ تشریحی:

مخرج مشترک می‌گیریم و سپس طرفین وسطین می‌کنیم. مخرج‌ها نباید صفر باشند.

$$\frac{(۲x-۳)(x-۳)+k(x-۱)}{(x-۱)(x-۳)}=\frac{۲}{(x-۱)(x-۳)} \Rightarrow ۲x^۲-۹x+۹+kx-k=۲$$

اکنون معادله را حل می‌کنیم:

$$\Rightarrow ۲x^۲-(۹-k)x-k+۷=۰ \Rightarrow (x-۱)(۲x+k-۷)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=\frac{۷-k}{۲} \end{cases}$$

اگر $\frac{۷-k}{۲}$ برابر ۱ یا ۳ باشد، معادله جواب ندارد.

$$\frac{۷-k}{۲}=۱ \Rightarrow k=۵\ ,\ \frac{۷-k}{۲}=۳ \Rightarrow k=۱ \Rightarrow \frac{k_۱+k_۲}{۲}=۳$$

۷ مجموع مربعات ریشه‌های معادلهٔ $x^2+\frac{9x^2}{(x+3)^2}=7$ کدام است؟

۱) $2+\sqrt{10}$ ۲) ۷ ۳) $4+2\sqrt{10}$ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی/ محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

هر آنچه بچه‌های مازی باید در مورد "روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم" بدانند:

$ax^2+bx+c \qquad$ ریشه‌ها $\Leftarrow \alpha,\beta$

$1)\ \alpha+\beta=S=-\frac{b}{a} \qquad 2)\ \alpha\beta=P=\frac{c}{a}$

$3)\ |\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \qquad 4)\ \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=S^2-2P$

$5)\ \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=S^3-3SP$

یه سری هم بزنیم به روش تغییر متغیر برای حل معادلهٔ درجه دوم:

گاهی بعضی از معادلات شبیه معادلهٔ درجهٔ دوم هستند. اما دقیقاً مثل آن نمی‌باشند. در این شرایط می‌توان با تغییر متغیر مناسب، معادله را به معادلهٔ درجهٔ دوم تبدیل کرد.

مثال) $x-3\sqrt{x}+2=0$

پاسخ: تغییر متغیر $\sqrt{x}=t$

$t^2-3t+2=0 \Rightarrow t=1,2$

$\Rightarrow \sqrt{x}=1,2 \Rightarrow x=1,4$

پاسخ تشریحی:

ابتدا معادله را به طریقی مینویسیم که شبیه معادله درجه دو شود:

$$(x-\frac{3x}{x+3})^2+\frac{6x^2}{x+3}=7$$

حال از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم:

$$(\frac{x^2}{x+3})^2+\frac{6x^2}{x+3}=7 \xrightarrow{(\frac{x^2}{x+3})=t}$$

سپس معادله درجه دوم را حل می‌کنیم:

$$t^2+6t=7 \Rightarrow \begin{cases} t=1=\frac{x^2}{x+3} \Rightarrow x^2-x-3=0 \\ t=-7=\frac{x^2}{x+3} \Rightarrow x^2+7x+21=0 \end{cases}$$

جواب مطلوب برابر است با:

$$\Rightarrow x^2-x-3=0 \Rightarrow \alpha^2+\beta^2=S^2-2P=1+6=7$$

۸ ریشهٔ معادلهٔ $\sqrt{2x+1}=\sqrt{5x+4}-\sqrt{3x+3}$ را a فرض کنید. مجموعه جواب نامعادله $x^2+4ax-3<0$ کدام است؟

۱) $(-3,1)$ ۲) $(-1,3)$ ۳) $(-\frac{1}{2},6)$ ۴) $(-6,\frac{1}{2})$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ ترکیبی / محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

مراقب باش نکتهٔ پایین از قلم نیفته!!!

در معادلات رادیکالی، پس از حل سوال، حتماً جواب‌ها را در معادلهٔ اولیه جایگذاری کرده تا مطمئن شویم که جواب‌های به دست آمده در معادلهٔ اصلی صدق می‌کنند یا خیر.

برای پیدا کردن ریشه معادله داریم:

$$\sqrt{5x+4}=\sqrt{3x+3}+\sqrt{2x+1} \Rightarrow 5x+4=3x+3+2x+1+2\sqrt{(3x+3)(2x+1)}$$

$$\Rightarrow (3x+3)(2x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \ \times \\ x=-\frac{1}{2} \ \checkmark \end{cases}$$

دقت کنید به ازای $x=-1$ زیر بعضی از رادیکال‌ها منفی می‌شود. پس $a=-\frac{1}{2}$ قابل قبول است.

حال مجموعه جواب نامعادله را به دست می‌آوریم:

$$x^2+4ax-3<0 \Rightarrow x^2-2x-3<0 \Rightarrow -1<x<3$$

۹ دستگاه A به تنهایی کاری را در ۳۰ ساعت انجام می‌دهد. اگر دستگاه A و B با هم کار کنند، کل کار را در ۱۲ ساعت انجام می‌دهند. اگر دستگاه A به مدت ۱۲ ساعت به تنهایی کار کند و سپس خاموش شود و به مدت n ساعت دستگاه B روشن شود و به تنهایی کار را پیش ببرد، مجموعاً ۸۰ درصد کار انجام می‌شود. مقدار n کدام است؟

۱) ۴   ۲) ۶   ۳) ۸   ۴) ۱۰

پاسخ: گزینه ۳   (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۱)

تو ریاضی هم قانون کار داریم! میگی نه نگاه کن...

اگر فردی کاری را در a روز (ساعت) انجام دهد، به آن معنی است که در هر روز (ساعت) $\frac{۱}{a}$ از کار را انجام می‌دهد. بنابراین اگر فردی کاری را در a روز (ساعت) و دیگری همان کار را در b روز (ساعت) انجام دهد، آن‌گاه اگر این دو نفر با هم کار کنند، در هر روز (ساعت) $(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b})$ از کار را انجام می‌دهند و کل کار در $\frac{۱}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}}$ روز (ساعت) تمام می‌شود.

فرض کنید دستگاه B در x ساعت کار را انجام می‌دهد:

$$\frac{۱}{۳۰}+\frac{۱}{x}=\frac{۱}{۱۲}\Rightarrow\frac{۱}{x}=\frac{۱}{۱۲}-\frac{۱}{۳۰}=\frac{۵-۲}{۶۰}=\frac{۱}{۲۰}\Rightarrow x=۲۰$$

با به دست‌آمدن x، می‌توانیم مقدار را حساب کنیم:

$$۱۲\times\frac{۱}{۳۰}+n\times\frac{۱}{۲۰}=\frac{۸۰}{۱۰۰}\Rightarrow\frac{n}{۲۰}=\frac{۸}{۱۰}-\frac{۱۲}{۳۰}\Rightarrow\frac{n}{۲۰}=\frac{۲۴-۱۲}{۳۰}=\frac{۱۲}{۳۰}\Rightarrow n=۸$$

۱۰ اگر $x=-۵$ کوچک‌ترین عدد صحیح عضو مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{x+a}{۱-ax}>۰$ باشد، مقدار a کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۵/۵   ۲) ۶/۵   ۳) $\frac{۱۱}{۶۰}$ ۴) $\frac{۱۳}{۶۰}$

پاسخ: گزینه ۱   (متوسط ـ مفهومی/ محاسباتی ـ ۱۰۰۴)

ایستگاه "روش تعیین علامت"

برای تعیین علامت عبارات گویا، صورت و مخرج را به عواملشان تجزیه کرده، سپس ریشه‌های آن‌ها را در جدول تعیین علامت می‌نویسیم و به شیوهٔ زیر عمل می‌کنیم.

A) اگر ریشهٔ موردنظر به تعداد فرد بار تکرار شده باشد، عبارت گویا در دو طرف آن ریشه تغییر علامت می‌دهد.

B) اگر ریشهٔ موردنظر به تعداد زوج بار تکرار شده باشد، عبارت گویا در دو طرف آن ریشه تغییر علامت نمی‌دهد.

C) اگر ریشهٔ موردنظر از یک عبارت قدرمطلقی باشد، عبارت گویا در دو طرف آن ریشه تغییر علامت نمی‌دهد.

D) اگر ریشهٔ موردنظر از یک عبارت رادیکالی با فرجهٔ فرد باشد، عبارت گویا در دو طرف آن ریشه تغییر علامت می‌دهد.

تذکر:

اگر یک ریشه به صورت ترکیبی از موارد بالا باشد، هر کدام از ۴ قانون بالا را جداگانه روی آن ریشه اعمال می‌کنیم و برآیند آن، جواب نهایی ما برای آن ریشه می‌باشد.

مثال:

$$P=\frac{|x-۲|(x-۳)^{۲}(x^{۲}-۴x+۳)}{(x^{۲}-۶x+۵)\sqrt[۳]{x-۱}}$$

پاسخ:

$$P=\frac{|x-۲|(x-۳)^{۲}(x-۳)(x-۱)}{(x-۱)(x-۵)\sqrt[۳]{x-۱}}=\frac{|x-۲|(x-۳)^{۳}}{(x-۵)\sqrt[۳]{x-۱}}$$

x		۱		۲		۳		۵	
P	−	ت.ن	+	•	+	•	−	ت.ن	+

پاسخ تشریحی

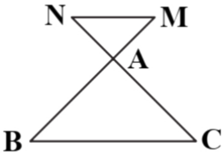
برای آن‌که مجموعه جواب نامعادله، محدود باشد باید a مثبت باشد. ریشهٔ صورت $-a$ و ریشهٔ مخرج $\frac{۱}{a}$ است. جدول تعیین علامت به صورت زیر است.

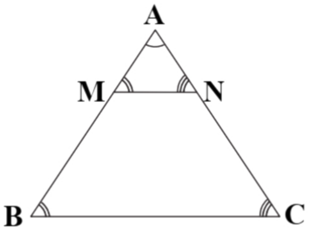
x		$-a$		$\frac{۱}{a}$	
$\frac{x+a}{۱-ax}$	−		+		−

جواب نامعادله به صورت $(-a,\frac{۱}{a})$ است، برای آن‌که -۵ کوچک‌ترین عضو باشد باید $-۶\le -a<-۵$ باشد، پس $۵<a\le ۶$ است و $a=۵/۵$ قابل قبول است.

۱۱ پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: ساده * درس‌های ۳ و ۴، فصل ۲ هندسه ۱

نکته: اگر خط راستی موازی یکی از اضلاع مثلثی، دو ضلع دیگر (یا امتداد آن‌ها) را در دو نقطه قطع کند، مثلثی با آن‌ها تشکیل می‌دهد که با مثلث اصلی متشابه است.

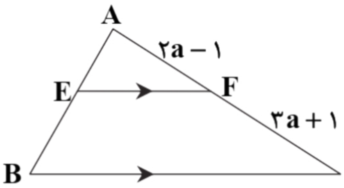




$$MN \parallel BC \Rightarrow A\overset{\triangle}{M}N \sim A\overset{\triangle}{B}C$$

نکته: در دو مثلث متشابه، نسبت محیط‌ها برابر با نسبت تشابه است.

طبق قضیهٔ اساسی تشابه، چون $EF \parallel BC$، پس دو مثلث ABC و AEF با هم متشابه‌اند و از آنجا که صورت سؤال گفته است محیط مثلث ABC سه برابر محیط مثلث AEF می‌باشد، پس نسبت تشابه این دو مثلث ۱ به ۳ است:

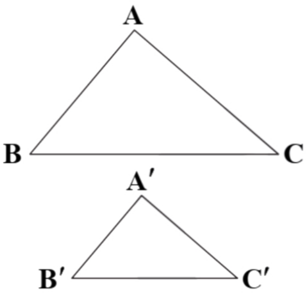


$K = \frac{۱}{۳}$: نسبت تشابه

$$\frac{AF}{AC} = K = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{۲a-۱}{۲a-۱+۳a+۱} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{۲a-۱}{۵a} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow ۶a-۳ = ۵a \Rightarrow a = ۳$$

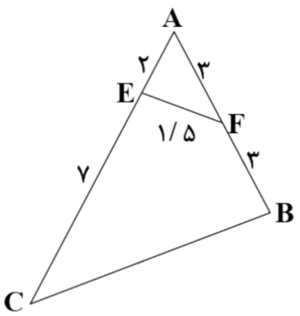
۱۲ پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: ساده * درس ۳، فصل ۲ هندسه ۱

نکته: هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویهٔ بین آن‌ها، هم‌اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند:



$$\hat{A} = \hat{A}' \ ,\ \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}C \sim A'\overset{\triangle}{B'}C'$$

دو مثلث AEF و ABC به حالت تناسب دو ضلع و تساوی زاویه بین آن‌ها با هم متشابه‌اند:



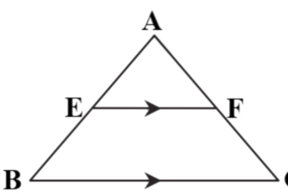
$$\left.\begin{array}{l} A \text{ زاویهٔ مشترک} \\ \frac{AE}{AB} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳} \\ \frac{AF}{AC} = \frac{۳}{۹} = \frac{۱}{۳} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض‌زض}} A\overset{\triangle}{E}F \sim A\overset{\triangle}{B}C$$

پس دو مثلث با نسبت $K = \frac{۱}{۳}$ متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{EF}{BC} = K = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{۱/۵}{BC} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow BC = ۳ \times ۱/۵ = ۴/۵$$

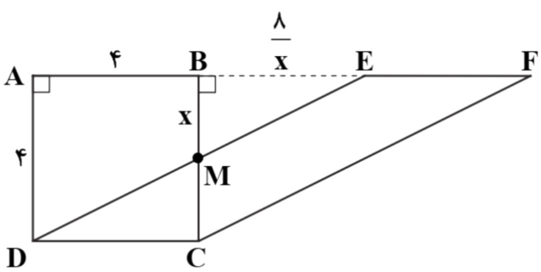
۱۳ پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * درس ۲، فصل ۲ هندسه ۱

نکته: در مثلث ABC اگر $EF \parallel BC$، داریم:



$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \ ,\ \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$

با فرض $BM = x$ داریم:



$$S_{B\overset{\triangle}{E}M} = ۴ = \frac{۱}{۲} BM \times BE$$

$$۸ = x \times BE \Rightarrow BE = \frac{۸}{x}$$

بر طبق قضیهٔ تالس در مثلث $A\overset{\triangle}{E}D$:

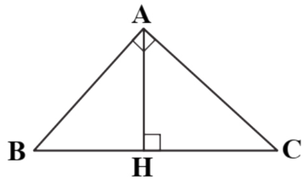
$$\frac{BE}{AE} = \frac{BM}{AD} \Rightarrow \frac{\frac{۸}{x}}{۴+\frac{۸}{x}} = \frac{x}{۴} \Rightarrow \frac{۸}{x} = \frac{x}{۴}(۴+\frac{۸}{x}) = x+۲ \Rightarrow x^۲+۲x-۸ = ۰ \Rightarrow (x-۲)(x+۴) = ۰ \Rightarrow x = ۲$$

طبق رابطهٔ فیثاغورس در مثلث AED داریم:

$$A\overset{\triangle}{E}D : DE = \sqrt{AD^۲ + AE^۲} = \sqrt{۴^۲ + (۴+۴)^۲} = ۴\sqrt{۵}$$

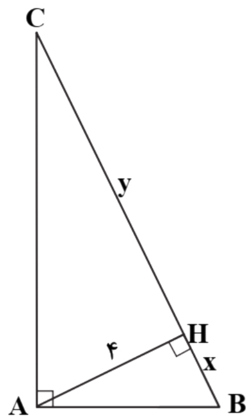
۱۴ پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار ❊ درس ۳، فصل ۲ هندسه ۱

نکته: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = ۹۰^\circ$) اگر AH ارتفاع وارد بر وتر باشد، داریم:



$$AH^۲ = BH \cdot CH$$

دو مثلث ABH و ACH دارای ارتفاع مشترک AH می‌باشند، پس نسبت مساحت آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های آن‌هاست. با فرض $CH = y$ و $BH = x$ داریم:



$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABH}}}{S_{\overset{\triangle}{ACH}}} = \frac{\frac{۱}{۲} AH \times BH}{\frac{۱}{۲} AH \times CH} = \frac{BH}{CH} = \frac{x}{y}$$

اولاً طبق فرض سؤال می‌دانیم:

$$x + y = ۱۰$$

ثانیاً طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$AH^۲ = BH \times CH \Rightarrow xy = ۱۶$$

حال دستگاه دو معادله دو مجهول زیر را حل می‌کنیم:

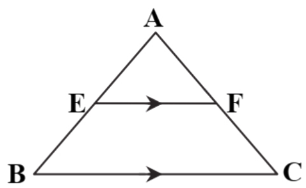
$$\begin{cases} x + y = ۱۰ \\ xy = ۱۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = ۱۰ - x \\ xy = ۱۶ \end{cases} \Rightarrow x(۱۰ - x) = ۱۶ \Rightarrow x^۲ - ۱۰x + ۱۶ = ۰$$

$$\Rightarrow (x - ۲)(x - ۸) = ۰ \xrightarrow{\text{با توجه به شکل}} x = ۲ \Rightarrow y = ۸$$

پس نسبت مساحت دو مثلث $\frac{x}{y} = \frac{۲}{۸} = \frac{۱}{۴}$ می‌باشد.

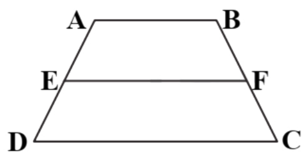
۱۵ پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار ❊ درس ۲، فصل ۲ هندسه ۱

نکته: در مثلث ABC اگر $EF \parallel BC$، داریم:



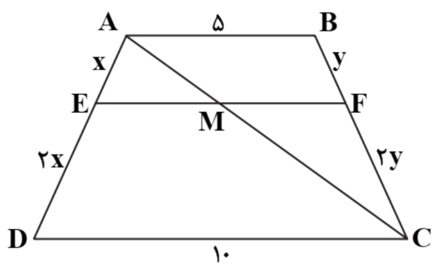
$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \quad , \quad \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$

نکته: در ذوزنقهٔ $ABCD$ اگر EF موازی قاعده‌ها باشد، داریم:



$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$$

طبق فرض و نکات فوق داریم:



$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} AE = x \ , \ ED = ۲x \\ BF = y \ , \ FC = ۲y \end{cases}$$

$$\text{تعمیم تالس در مثلث } ACD : \frac{EM}{CD} = \frac{AE}{AD} = \frac{x}{۳x} \Rightarrow \frac{EM}{۱۰} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow EM = \frac{۱۰}{۳}$$

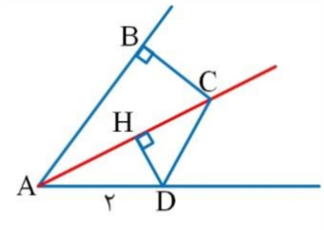
$$\text{تعمیم تالس در مثلث } ABC : \frac{MF}{AB} = \frac{CF}{BC} = \frac{۲y}{۳y} \Rightarrow \frac{MF}{۵} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow MF = \frac{۱۰}{۳}$$

سؤال از ما نسبت $\frac{EM}{FM}$ را می‌خواهد، که داریم:

$$\frac{EM}{FM} = \frac{\frac{۱۰}{۳}}{\frac{۱۰}{۳}} = ۱$$

نقطهٔ M وسط EF قرار دارد.

۱۶ در شکل مقابل AC نیمساز زاویه $\hat{A}$ است. اگر $AD=۲$ ، $AC=۵$ و $DH=۱/۲$ باشد، مساحت مثلث قائم‌الزاویه $A\overset{\triangle}{B}C$ کدام است؟



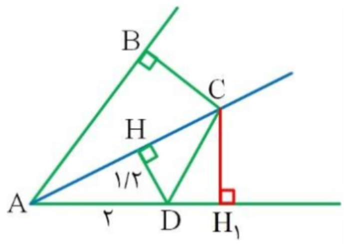
۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

پاسخ: گزینه ٤ (هندسه ۱ ـ صفحه ۱۱ و ۱۲ ـ متوسط)

نکته مهم:
هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و برعکس، یعنی اگر نقطه‌ای از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله بود روی نیمساز آن قرار دارد.

پاسخ تشریحی:

اگر از C بر امتداد AD عمود رسم کنیم و پای عمود را $H_۱$ بنامیم، داریم:



$CH_۱ = CB$

از طرفی در مثلث $A\overset{\triangle}{D}C$ داریم:

$$S_{A\overset{\triangle}{D}C} = \frac{۱}{۲}DH \times AC = \frac{۱}{۲}AD \times CH_۱ \to \frac{۱}{۲}۱/۲ \times ۵ = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times CH_۱ \to CH_۱ = ۳$$

با توجه به درسنامه، چون C رو نیمساز است $CH_۱$ و BC برابرند، یعنی $BC=۳$ است.

در مثلث قائم‌الزاویه $A\overset{\triangle}{B}C$ داریم:

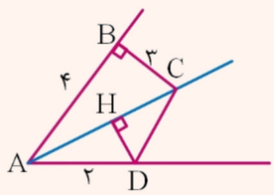
$$BC=۳ \ , \ AC=۵ \ , \ \hat{B}=۹۰^\circ \xrightarrow{AC^۲=BC^۲+AB^۲} AB=۴$$

پس مساحت مثلث $A\overset{\triangle}{B}C$ برابراست با:

$$S_{A\overset{\triangle}{B}C} = \frac{BC \times AB}{۲} = ۶$$

سوالات منتخب:

در شکل مقابل، AC نیمساز است و $AB \perp BC$ و $AC \perp DH$ می‌باشد. اگر $BC=۳$ ، $AB=۴$ و $AD=۲$ باشد، اندازه DH کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۴}$
۲) $\frac{۴}{۳}$
۳) $\frac{۵}{۶}$
۴) $\frac{۶}{۵}$ ✓

۱۷ نقطه O به فاصله ۲ از خط d قرار دارد. مجموعه S تمام نقاطی هستند که از O به فاصله ۳ و از d به فاصله ۱ هستند. اگر A و B نزدیک‌ترین نقاط مجموعه S به یکدیگر باشند، فاصله A تا B چقدر است؟

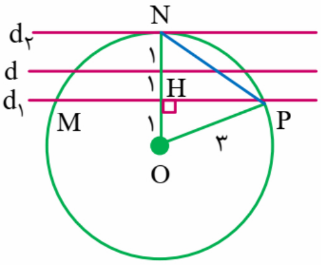
۱) $۲\sqrt{۲}$
۲) $۴\sqrt{۲}$
۳) $۲\sqrt{۳}$
۴) $۴\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه ۳ (هندسه ۱ ـ صفحه ۱۰ ـ دشوار)

نکات طلایی:

۱) تمام نقاطی از صفحه که از نقطه O به فاصله r باشند، دایره‌ای به مرکز O و شعاع r است.
۲) تمام نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله m باشند، ۲ خط موازی با d در دو طرف d و به فاصله m از آن می‌باشند.
۳) تمام نقاطی از صفحه که از ۲ خط موازی به یک فاصله باشند، یک خط است موازی آن دو خط که از وسط آن‌ها می‌گذرد.
٤) تمام نقاطی از صفحه که از ۲ خط متقاطع به یک فاصله باشند، دو خط عمود بر هم هستند که نیمساز زاویای بین آن‌ها می‌باشند.

پاسخ تشریحی:



طبق قسمت ۱ و ۲ از درسنامه و شکل روبه‌رو، ۳ نقطه M و N و P نقاط مجموعه S هستند.

فاصله M تا P دو برابر پاره‌خط HP است. پس:

$$MP = ۲HP = ۲\sqrt{۳^۲ - ۱^۲} = ۲\sqrt{۸} = \sqrt{۳۲}$$

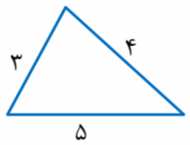
فاصله N تا P برابر با N تا M است و آن را هم به کمک رابطه فیثاغورث می‌توان پیدا کرد:

$$NP^۲ = HP^۲ + HN^۲ = (\sqrt{۸})^۲ + ۲^۲ = ۱۲$$

$$\rightarrow NP = MN = \sqrt{۱۲}$$

نقاط M و N همچنین N و P نزدیکترین نقاط درون مجموعه S هستند که به فاصله $\sqrt{۱۲}$ یا $۲\sqrt{۳}$ از هم قرار دارند.

۱۸ **در مثلث شکل مقابل، فاصله نقطه همرسی نیمسازها از ضلع کوچک‌تر کدام است؟**



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱

۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۲ (هندسه ـ صفحه ۱۹ ـ متوسط)

نکته:
فاصله نقطه همرسی نیمسازها از ۳ ضلع برابر است. یعنی نقطه همرسی نیمسازها مرکز دایره محاطی مثلث است.
نتیجه: مساحت هر مثلث با ضرب فاصله نقطه همرسی نیمسازها از یک ضلع در نصف محیط مثلث برابر است.

تمرین: نتیجه را ثابت کنید.

پاسخ تشریحی:

با توجه به طول اضلاع مثلث، مثلث یک مثلث قائم‌الزاویه است. مساحت و نصف محیط آن برابر است با:

$$S = \frac{۳ \times ۴}{۲} = ۶$$

$$P = \frac{۳+۴+۵}{۲} = ۶$$

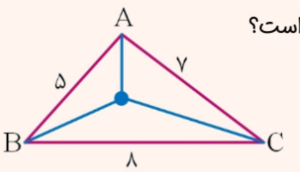
با توجه به نتیجه درسنامه داریم:

S = (فاصله نقطه همرسی نیمساز از هر ضلع) × P → ۶ = (فاصله نقطه همرسی نیمساز از هر ضلع) × ۶

→ فاصله نقطه همرسی نیمساز از هر ضلع = ۱

سوالات منتخب:

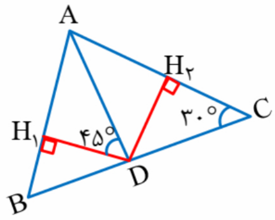
در مثلث شکل مقابل، O نقطه همرسی نیمسازها است. نسبت مساحت مثلث کوچک‌تر به مساحت مثلث $A\overset{\triangle}{B}C$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ✓

۳) $\frac{۲}{۷}$ ۴) $\frac{۲}{۹}$

۱۹ در شکل مقابل، $AH_۱ = AH_۲$ است. $\frac{DH_۱}{AB}$ با کدام برابر است؟



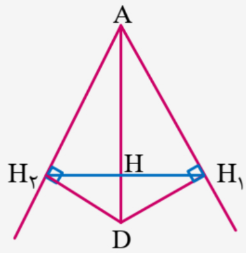
۱) $\frac{DC}{BC}$ ۲) $\frac{DH_۲}{AC}$

۳) $\frac{AD}{BC}$ ۴) $\frac{BD}{BC}$

پاسخ: گزینه ۱ (هندسه ۱ ـ صفحه ۱۹ ـ متوسط)

نکته مهم:

اگر AD نیمساز زاویه A باشد، داریم:



۱) $DH_۱ = DH_۲$

۲) $AH_۱ = AH_۲$

۳) $HH_۱ = HH_۲$

۴) $H_۱HA = H_۲HA = ۹۰$

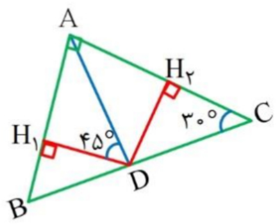
نکته:

در شکل بالا، از هر کدام از تساوی‌های $DH_۱ = DH_۲$ و $AH_۱ = AH_۲$ می‌توان نتیجه گرفت که AD نیمساز است.

پاسخ تشریحی:

با توجه به $AH_۱ = AH_۲$ طبق نکته درسنامه می‌توان نتیجه گرفت AD نیمساز است و تساوی $DH_۱ = DH_۲$ هم برقرار است.

از طرفی در مثلث $\overset{\triangle}{ADH_۱}$، زاویه‌های $\hat{D} = ۴۵°$ و $\hat{H}_۱ = ۹۰°$ است. پس $H_۱\hat{A}D = H_۲\hat{A}D = ۴۵°$ است و $AH_۱ = AH_۲ = DH_۱ = DH_۲$ می‌باشد و چهارضلعی $AH_۱DH_۲$ مربع است.



در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\triangle}{CH_۲D}$ داریم:

$$\hat{C} = ۳۰° \rightarrow \frac{H_۲D}{DC} = \frac{۱}{۲}$$

در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\triangle}{ABC}$ داریم:

$$\hat{C} = ۳۰° \rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{۱}{۲}$$

پس داریم:

$$\frac{H_۲D}{DC} = \frac{AB}{BC} \rightarrow \frac{DH_۲}{AB} = \frac{DC}{BC}$$

با توجه به $DH_۱ = DH_۲$ داریم:

$$\frac{DH_۱}{AB} = \frac{DC}{BC}$$

۲۰ در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ وسط‌های اضلاع را به هم وصل می‌کنیم تا مثلث $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ حاصل شود. نقطه هم‌رسی ارتفاع‌های $A'B'C'$ مرکز .... است؟

۱) دایره محیطی مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ ۲) دایره محاطی مثلث $\overset{\triangle}{A'B'C'}$

۳) دایره محاطی مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ ۴) دایره محیطی مثلث $\overset{\triangle}{A'B'C'}$

پاسخ: گزینه ۱ (هندسه ۱ ـ صفحه ۱۹ ـ متوسط)

نکات طلایی:

۱) محل برخورد عمودمنصف‌های یک مثلث، مرکز دایره محیطی آن مثلث است.

۲) محل برخورد نیمسازهای یک مثلث، مرکز دایره محاطی آن مثلث است.

۳) اگر از هر رأس مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ خطی موازی ضلع روبه‌روی آن رسم کنیم تا مثلث $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ بدست آید، عمودمنصف‌های $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ ارتفاع‌های مثلث ABC هستند.

٤) اگر وسط‌های اضلاع مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ را به یکدیگر وصل کنیم تا مثلث $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ بدست آید، ارتفاع‌های مثلث $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ عمودمنصف‌های مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ هستند.

پاسخ تشریحی:

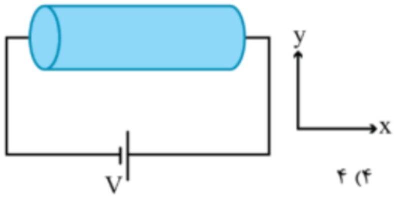
ارتفاع‌های مثلث $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ عمودمنصف‌های مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ هستند و نقطه همرسی ارتفاع‌های $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ نقطه همرسی عمودمنصف‌های مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ است یعنی مرکز دایره محیطی مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ است.

سوالات منتخب:

در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ از هر رأس خطی موازی ضلع روبه‌رو به آن رسم می‌کنیم تا مثلث $A'B'C'$ حاصل شود. نقطه همرسی ارتفاع‌های $\overset{\triangle}{ABC}$ مرکز دایره .... است.

۱) محیطی مثلث ABC ۲) محاطی مثلث ABC ۳) محیطی مثلث $A'B'C'$ ✓ ۴) محاطی مثلث $A'B'C$

۲۱ شکل زیر یک مقاومت فلزی متصل به یک باتری را نشان می‌دهد. چه تعداد از موارد زیر درون مقاومت فلزی در جهت محور x است؟



الف: نیروی وارد بر الکترون‌ها

ب: جهت جریان الکتریکی

ج: میدان الکتریکی

د: سرعت سوق الکترون‌ها

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۱۰۲)

جریان الکتریکی

شکل مقابل حرکت الکترون‌ها را درون یک رسانای فلزی در حضور میدان الکتریکی نشان می‌دهد.

<u>در مورد این شکل به نکات زیر توجه کنید:</u>

۱ـ در غیاب میدان الکتریکی، الکترون‌ها به‌صورت کاتوره‌ای و تصادفی در همهٔ جهت‌ها حرکت می‌کنند و بار الکتریکی به‌طور خالص منتقل نمی‌شود، بنابراین جریان الکتریکی درون رسانا ایجاد نمی‌شود.

۲ـ در حضور میدان الکتریکی، الکترون‌ها با سرعتی متوسط موسوم به سرعت سوق در خلاف جهت میدان الکتریکی حرکت می‌کنند. علت این حرکت آن است که میدان الکتریکی، نیرویی در خلاف جهت میدان به الکترون‌ها وارد می‌کند.

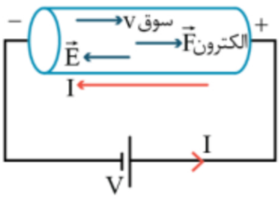
۳ـ به‌دلیل حرکت الکترون‌ها با سرعت سوق در خلاف جهت میدان، بار الکتریکی منفی به‌طور خالص در خلاف جهت میدان الکتریکی به حرکت درمی‌آید، بنابراین جریان الکتریکی در جهت میدان الکتریکی در رسانا ایجاد می‌شود. دقت کنید که طبق قرارداد جهت جریان الکتریکی هم‌جهت با حرکت بارهای مثبت یا به عبارت دیگر در خلاف جهت حرکت بارهای منفی است.

۴ـ میدان الکتریکی و جریان الکتریکی هم‌جهت هستند، در حالی‌که جهت سرعت سوق الکترون‌ها در خلاف جهت آن‌هاست.

۵ـ سرعت سوق الکترون‌ها بسیار کم و از مرتبهٔ $10^{-4}\,\frac{m}{s}$ است، در صورتی‌که سرعت حرکت کاتوره‌ای آن‌ها بسیار زیاد است.

پاسخ تشریحی:

با توجه به نکات ارائه‌شده، جهت هر یک از موارد مطابق شکل زیر است:



۲۲ با ۱۸۰ گرم مس، سیمی استوانه‌ای و توپر به طول ۲۵ متر ساخته‌ایم. مقاومت الکتریکی این سیم چند اهم است؟ (چگالی و مقاومت ویژهٔ مس به ترتیب $9000\,\frac{kg}{m^3}$ و $1/6\times10^{-8}\,\Omega.m$ است.)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

رابطهٔ ساختمانی مقاومت

۱ـ مقدار مقاومت الکتریکی یک سیم به ویژگی‌های ساختمانی و دمای آن وابسته است و ربطی به ولتاژ و جریان آن ندارد. مقدار مقاومت الکتریکی یک سیم را می‌توانیم از رابطهٔ زیر به‌دست آوریم:

$$R=\rho\frac{L}{A}$$

R: مقدار مقاومت الکتریکی با یکای اهم

ρ: مقاومت ویژه با یکای (اهم×متر)

L: طول سیم با یکای متر

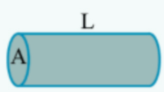
A: سطح مقطع سیم با یکای مترمربع

۲ـ با توجه به رابطهٔ $R=\rho\frac{L}{A}$، برای مقایسهٔ مقاومت الکتریکی دو سیم به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$R=\rho\frac{L}{A}\rightarrow\frac{R_2}{R_1}=\frac{\rho_2}{\rho_1}\times\frac{L_2}{L_1}\times\frac{A_1}{A_2}$$

$$\xrightarrow[\text{d: قطر مقطع}]{A\propto d^2}\frac{R_2}{R_1}=\frac{\rho_2}{\rho_1}\times\frac{L_2}{L_1}\times\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2$$

۳ـ گاهی در سؤالات مربوط به محاسبهٔ مقاومت، از جرم و چگالی سیم هم استفاده می‌شود. برای حل این سؤالات می‌توانیم به‌صورت زیر عمل کنیم. دقت کنید که چگالی را با ρ' نشان داده‌ایم تا با مقاومت ویژه اشتباه نشود.



$$\text{چگالی}:\ \rho'=\frac{m}{V}=\frac{m}{AL}\rightarrow A=\frac{m}{\rho' L}$$

$$R=\rho\frac{L}{A}\xrightarrow{A=\frac{m}{\rho' L}}R=\rho\rho'\frac{L^2}{m}$$

پاسخ تشریحی:

مقاومت سیم برابر است با:

$$R=\rho\rho'\frac{L^2}{m}=1/6\times10^{-8}\times9000\times\frac{(25)^2}{0/18}=0/5\,\Omega$$

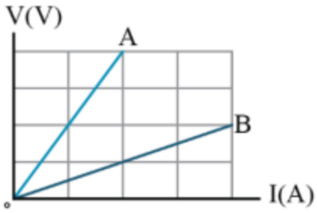
۲۳ **نمودار ولتاژ ـ جریان دو مقاومت هم‌جنس A و B مطابق شکل است. اگر سیم A، ۱۰ متر بلندتر از سیم B باشد، طول سیم B چند متر است؟**

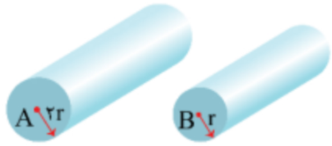
۱) $\frac{۳}{۴}$

۲) $\frac{۴}{۳}$

۳) $\frac{۲}{۳}$

۴) $\frac{۳}{۲}$





پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ نموداری ـ ۱۱۰۲)

قانون اهم

۱ـ مطابق قانون اهم، رابطهٔ ولتاژ و جریان یک مقاومت به‌صورت زیر است:

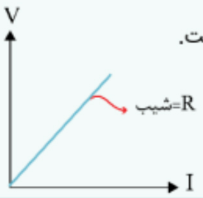
$$V = RI$$

V : اختلاف پتانسیل با یکای ولت

I : جریان الکتریکی با یکای آمپر

R : مقاومت الکتریکی با یکای اهم

۲ـ مطابق قانون اهم، نمودار تغییرات ولتاژ یک مقاومت بر حسب جریان الکتریکی عبوری از آن مطابق شکل زیر به‌صورت یک خط راست است.



پاسخ تشریحی:

شیب نمودار ولتاژ ـ جریان A، ۴ برابر شیب نمودار ولتاژ ـ جریان B است، بنابراین مقاومت الکتریکی A، ۴ برابر مقاومت الکتریکی B می‌باشد. از طرفی طبق شکل داده شده، شعاع مقطع A، ۲ برابر شعاع مقطع B است، بنابراین مساحت مقطع A، ۴ برابر مساحت مقطع B می‌باشد.

در ادامه برای مقایسهٔ مقاومت دو سیم می‌توان نوشت:

$$R = \rho\frac{L}{A} \xrightarrow[\rho\ \text{برابر}]{\text{هم‌جنس}} \frac{R_A}{R_B} = \frac{L_A}{L_B} \times \frac{A_B}{A_A}$$

$$\to ۴ = \frac{L_B + ۱۰}{L_B} \times \frac{۱}{۴} \to ۱۶L_B = L_B + ۱۰ \to L_B = \frac{۲}{۳}\text{m}$$

گروه آموزشی ماز

۲۴ **شکل زیر، یک پتانسیومتر را نشان می‌دهد. اگر نقاط A و B را به اختلاف پتانسیل ۱۰V وصل کنیم، جریان ۰/۵mA از پتانسیومتر می‌گذرد و اگر نقاط B و C را به اختلاف پتانسیل ۲۰V متصل کنیم، جریان ۰/۲۵mA از پتانسیومتر می‌گذرد. نقاط A و C را به اختلاف پتانسیل چند ولت وصل کنیم تا جریان ۰/۸mA از آن عبور کند؟**

۱) ۱۰

۲) ۴۰

۳) ۸۰

۴) ۲۰

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی و محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

گام اول:

مقاومت قسمت AB برابر است با:

$$R_{AB} = \frac{V_{AB}}{I_{AB}} = \frac{۱۰V}{۰/۵mA} = ۲۰k\Omega$$

گام دوم:

مقاومت قسمت BC برابر است با:

$$R_{BC} = \frac{V_{BC}}{I_{BC}} = \frac{۲۰V}{۰/۲۵mA} = ۸۰k\Omega$$

گام سوم:

مقاومت AC برابر مجموع مقاومت‌های AB و BC است، بنابراین:

$$R_{AC} = R_{AB} + R_{BC} = ۲۰ + ۸۰ = ۱۰۰k\Omega$$

گام چهارم:

حال باید ببینیم که نقاط A و C را باید به چه ولتاژی متصل کنیم تا جریان ۰/۸mA از آن بگذرد.

$$V_{AC} = R_{AC}I_{AC} = ۱۰۰k\Omega \times ۰/۸mA = ۸۰V$$

۲۵ **مقاومت R را به اختلاف پتانسیل ثابت ۲V وصل می‌کنیم، در این حالت در ۱ دقیقه، 8×10^{10} الکترون از یک سطح مقطع این مقاومت عبور می‌کند. اگر اندازهٔ مقاومت را ۳ برابر و اختلاف پتانسیل دو سر آن را $\frac{1}{2}$ برابر کنیم، در مدت‌زمان ۲ دقیقه چند الکترون از یک سطح مقطع مشخص این مقاومت عبور می‌کند؟**

۱) $\frac{4}{3}\times10^{10}$ ۲) $\frac{3}{4}\times10^{10}$ ۳) $\frac{16}{3}\times10^{10}$ ۴) $\frac{8}{3}\times10^{10}$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

برای مقاومت R می‌توان نوشت:

$$R=\frac{V}{I}$$

از طرفی $I=\frac{\Delta q}{\Delta t}=\frac{ne}{\Delta t}$، بنابراین داریم:

$$R=\frac{V\Delta t}{ne}$$

بنابراین در حالت اولیه داریم:

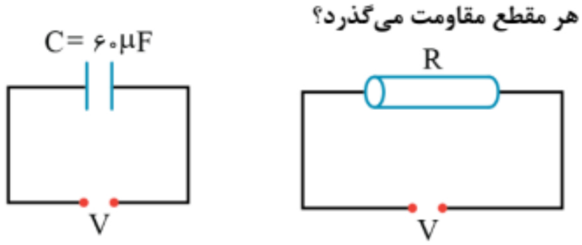
$$R=\frac{2V\times1\text{min}}{8\times10^{10}\times e}$$

در حالت دوم، مقاومت ۳ برابر و ولتاژ نصف می‌شود، در مدت ۲ دقیقه داریم:

$$3R=3\times\frac{2V\times1\text{min}}{8\times10^{10}\times e}=\frac{\frac{1}{2}V\times2\text{min}}{n\times e}$$

$$\rightarrow n=\frac{4}{3}\times10^{10}$$

۲۶ **مطابق شکل زیر، یک خازن و یک مقاومت استوانه‌ای شکل توپر را به طور جداگانه به ولتاژ یکسانی وصل کرده‌ایم. مقاومت R چند اهم باشد تا اندازهٔ بار ذخیره شده در هر صفحهٔ خازن برابر اندازهٔ باری باشد که در هر دقیقه به طور خالص از هر مقطع مقاومت می‌گذرد؟**



۱) 2×10^{3}
۲) 10^{3}
۳) 10^{6}
۴) 2×10^{6}

پاسخ: گزینه ۳ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

گام اول:

بار ذخیره‌شده در هر صفحهٔ خازن برابر است با:

$$q_1=CV=60\times10^{-6}\times V$$

گام دوم:

بار الکتریکی گذرنده هر مقطع از مقاومت برابر است با:

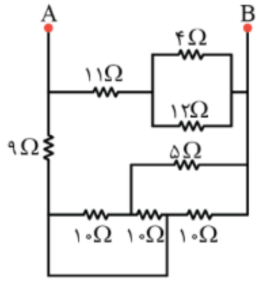
$$\begin{cases}I=\frac{V}{R}\\ I=\frac{q}{\Delta t}\end{cases}\rightarrow\frac{q_2}{\Delta t}=\frac{V}{R}\rightarrow q_2=\frac{V\Delta t}{R}\xrightarrow{\Delta t=60s}q_2=\frac{60V}{R}$$

گام سوم:

با برابر قرار دادن مقدار بارهای الکتریکی داریم:

$$q_1=q_2\rightarrow60\times10^{-6}V=\frac{60V}{R}\rightarrow R=\frac{60}{60\times10^{-6}}=10^{6}\Omega$$

۲۷ مقاومت معادل بین نقاط A و B چند اهم است؟



۱) ۷

۲) ۱۰

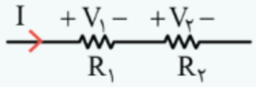
۳) ۱۴

۴) ۵

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

مقاومت معادل

۱ـ هنگامی که دو مقاومت بدون هیچ انشعابی با یک سیم به هم بسته شده باشند، به اتصال آن‌ها سری یا متوالی می‌گوییم. در مقاومت‌های متوالی روابط زیر برقرار است.



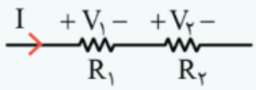
$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

$$I_{eq} = I_1 = I_2$$

$$V_{eq} = V_1 + V_2$$

۲ـ در مقاومت‌های متوالی، مقاومت معادل از تک‌تک مقاومت‌ها بزرگ‌تر است.

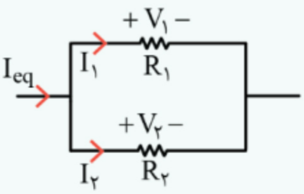
۳ـ در مقاومت‌های متوالی، ولتاژ و توان مقاومت‌ها با اندازهٔ آن‌ها رابطهٔ مستقیم دارد.



$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{R_2}{R_1}$$

۴ـ هنگامی که دو سر دو مقاومت با سیم رسانا به هم متصل شده باشد، این دو مقاومت به صورت موازی به هم متصل شده‌اند. در مقاومت‌های موازی روابط زیر برقرار است.



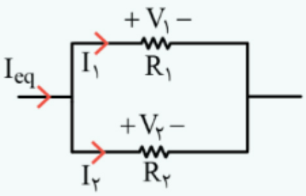
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \rightarrow R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$I_{eq} = I_1 + I_2$$

$$V_{eq} = V_1 = V_2$$

۵ـ در مقاومت‌های موازی، مقاومت معادل از تک‌تک مقاومت‌های موازی کوچک‌تر است.

۶ـ در مقاومت‌های موازی، جریان و توان مقاومت‌ها با اندازهٔ آن‌ها رابطهٔ عکس دارد.

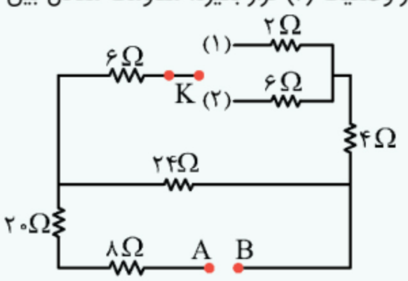


$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{R_1}{R_2}$$

مثال:

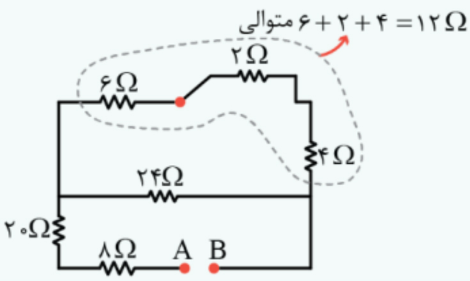
در مدار مقابل اگر کلید K در وضعیت (۱) قرار گیرد، مقاومت معادل بین نقاط A و B برابر R_1 است و اگر کلید K در وضعیت (۲) قرار بگیرد، مقاومت معادل بین نقاط A و B برابر R_2 است. حاصل $R_2 - R_1$ برابر چند اهم است؟



برای پاسخ دادن به این سؤال، هر دو حالت کلید را جداگانه بررسی می‌کنیم.

حالت اول: کلید در وضعیت (۱)

در این حالت مدار به شکل زیر درمی‌آید و مقاومت ۶ اهمی از مدار حذف می‌گردد.

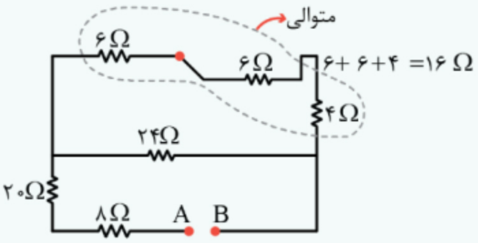


در مدار بالا مقاومت‌های 6Ω، 2Ω و 4Ω با هم متوالی بوده و حاصل آن‌ها که برابر 12Ω است با مقاومت 24Ω موازی است، بنابراین مقاومت معادل برابر است با:

$$R_1 = 8 + 20 + \underbrace{\frac{12\times 24}{12+24}}_{\text{حاصل مقاومت‌های موازی ۱۲, ۲۴ اهمی}} \rightarrow R_1 = 36\Omega$$

حالت دوم: کلید در وضعیت (۲)

در این حالت مقاومت 2Ω حذف می‌شود و مدار به شکل زیر درمی‌آید.



در مدار بالا مقاومت‌های ۶ اهمی و مقاومت 4Ω با هم متوالی بوده و معادل آن‌ها که برابر 16Ω است با مقاومت 24Ω موازی است، بنابراین مقاومت معادل برابر است با:

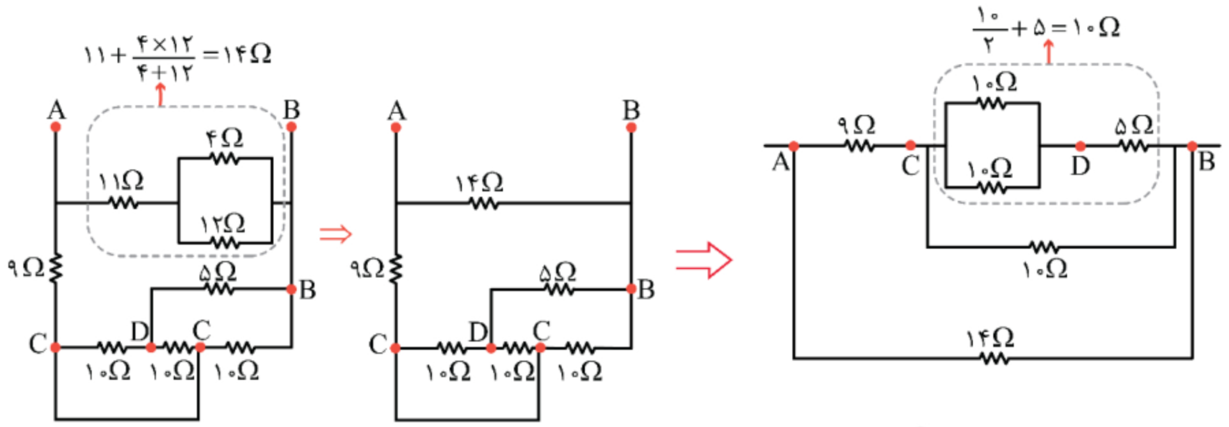
$$R_2 = 8 + 20 + \underbrace{\frac{16\times 24}{16+24}}_{\text{حاصل مقاومت‌های موازی ۱۶, ۲۴ اهمی}} \rightarrow R_2 = 37/6\Omega$$

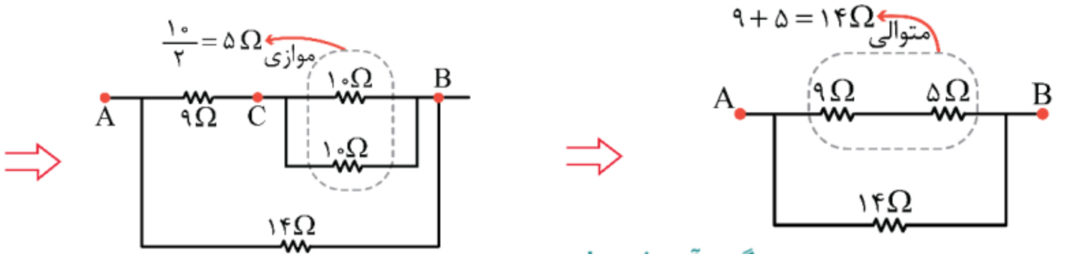
و در نهایت پاسخ سؤال برابر است با:

$$R_2 - R_1 = 37/6 - 36 = 1/6\Omega$$

پاسخ تشریحی:

با نام‌گذاری نقاط مدار، شکل ساده‌تری از آن را رسم می‌کنیم.

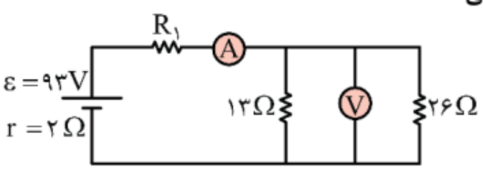




$$R_{eq} = \frac{14}{2} = 7\Omega$$

گروه آموزشی ماز

۲۸ در مدار زیر، ولت‌سنج آرمانی ۳۹V را اندازه می‌گیرد. آمپرسنج آرمانی چند آمپر را نشان می‌دهد؟



۱) ۴/۵
۲) ۳
۳) ۶
۴) مقاومت R_1 باید مشخص باشد.

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

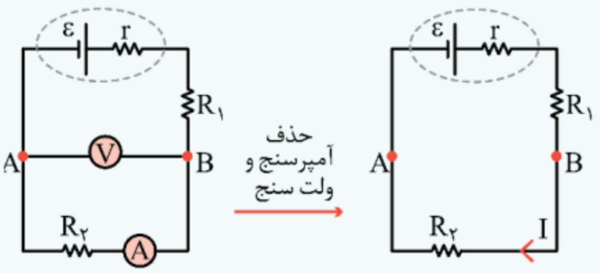
ولت‌سنج ایده‌آل و آمپرسنج ایده‌آل

در سؤالاتی که عدد آمپرسنج یا ولت‌سنج آرمانی پرسیده می‌شود، برای راحتی می‌توانیم به‌صورت زیر عمل کنیم:

۱ـ آمپرسنج را از مدار حذف کرده و به جای آن سیم قرار می‌دهیم.

۲ـ ولت‌سنج را از مدار حذف کرده و سیم‌های شاخهٔ آن را پاک می‌کنیم.

به عنوان مثال مدار مقابل را به‌صورت نشان داده‌شده ساده می‌کنیم:



پس از حذف آمپرسنج و ولت‌سنج می‌توانیم مدار ساده‌شده را به راحتی حل کنیم. در این صورت جریان I همان عدد آمپرسنج است و اختلاف پتانسیل نقاط A و B (دو سر ولت‌سنج) برابر عدد ولت‌سنج می‌باشد. برای محاسبهٔ اختلاف پتانسیل نقاط می‌توان از تکنیک پتانسیل‌نویسی استفاده کرد.

پاسخ تشریحی:

ولت‌سنج ولتاژ دو سر مقاومت‌های ۱۳Ω و ۲۶Ω را اندازه می‌گیرد. با استفاده از قانون اهم برای هر یک از مقاومت‌ها، داریم:

۱۳Ω مقاومت : $V = R_1 I_1 \to ۳۹ = ۱۳I_1 \to I_1 = ۳A$

۲۶Ω مقاومت : $V = R_2 I_2 \to ۳۹ = ۲۶I_2 \to I_2 = ۱/۵A$

جریان گذرنده از آمپرسنج برابر مجموع جریان‌های گذرنده از مقاومت‌های ۱۳Ω و ۲۶Ω است، بنابراین می‌توان نوشت:

جریان آمپرسنج : $I = I_1 + I_2 = ۳ + ۱/۵ = ۴/۵A$

اگر...

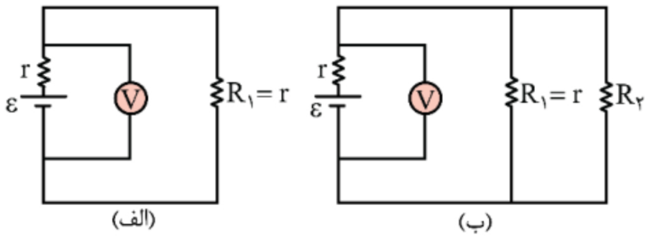
اگر مقدار مقاومت R_1 پرسیده می‌شد، پاسخ چه بود؟

پاسخ: با توجه به این‌که جریان کل مدار را می‌دانیم، می‌توان نوشت:

$$I = \frac{\varepsilon}{r + R_{eq}} \to ۴/۵ = \frac{۹۳}{۲ + R_{eq}} \to R_{eq} = \frac{۵۶}{۳}\Omega$$

$$R_{eq} = R_1 + \frac{۱۳ \times ۲۶}{۱۳ + ۲۶} \to \frac{۵۶}{۳} = R_1 + \frac{۲۶}{۳} \to R_1 = ۱۰\Omega$$

۲۹ **در مدارهای (الف) و (ب) شکل زیر، نیروی محرکهٔ باتری‌ها، یکسان است. در صورتی که ولت‌سنج‌های آرمانی هر دو مدار، تقریباً عددهای یکسانی را نشان دهند، حاصل $k = \frac{R_2}{R_1}$ کدام است؟**



۱) $k = ۰$

۲) $k = ۱$

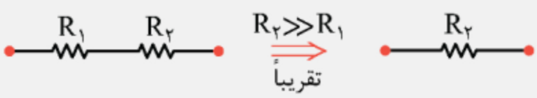
۳) $k >> ۱$

۴) $k << ۱$

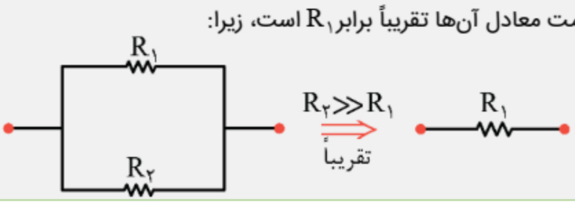
پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۱۰۲)

نکته:

۱ـ اگر دو مقاومت R_1 و R_2 به طور متوالی به هم بسته شوند به‌طوری که $R_2 >> R_1$ باشد، مقاومت معادل آن‌ها تقریباً برابر R_2 است، زیرا می‌توان از R_1 در مقایسه با R_2 صرف‌نظر کرد.



۲ـ اگر دو مقاومت R_1 و R_2 به طور موازی به هم بسته شوند به طوری که $R_2 >> R_1$ باشد، مقاومت معادل آن‌ها تقریباً برابر R_1 است، زیرا:



$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \underbrace{\frac{1}{R_2}}_{\downarrow} \to R_{eq} = R_1$$

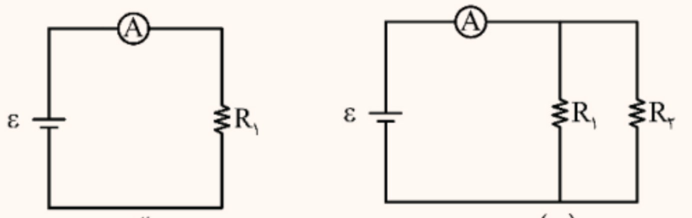
چون R_2 بزرگ است، از این قسمت صرف نظر می‌کنیم

با توجه به این‌که ولت‌سنج در هر دو حالت تقریباً مقدار برابری را نشان می‌دهد، می‌توان گفت مقاومت معادل مدار در دو حالت تقریباً یکسان است. با توجه به نکتهٔ ارائه‌شده، $R_۲ >> R_۱$ است تا مقاومت معادل آن‌ها تقریباً برابر $R_۱$ شود.

$$R_۲ >> R_۱ \rightarrow k = \frac{R_۲}{R_۱} >> ۱$$

کنکور مجدد تجربی ۱۴۰۱:

در مدارهای (الف) و (ب) شکل زیر، نیروی محرکهٔ باتری‌های آرمانی، یکسان است. در صورتی که آمپرسنج‌های آرمانی هردو مدار، تقریباً عددهای یکسانی را نشان دهند، کدام مورد، صحیح است؟ ($R_۱$ در هردو مدار یکسان است.)



(الف) (ب)

۱) $R_۲ = ۰$

۲) $R_۲ = R_۱$

۳) $R_۱ >> R_۲$

۴) $R_۲ >> R_۱$

پاسخ: گزینهٔ ۴

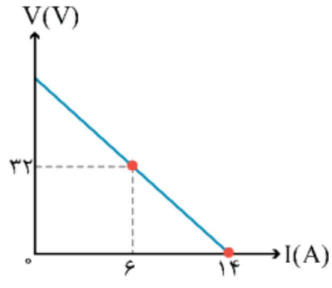
در هر دو مدار، آمپرسنج جریان خروجی از باتری را نشان می‌دهد. در نتیجه برای آنکه آمپرسنج‌ها عدد یکسانی را نشان دهند، باید مقاومت معادل دو مدار نیز برابر باشد، پس باید $R_۲ = \infty$ باشد.

مدار (الف) : $R_{eq} = R_۱$

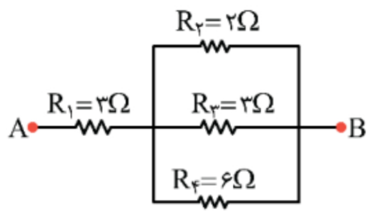
مدار (ب) : $\frac{۱}{R_{eq}} = \frac{۱}{R_۱} + \frac{۱}{\infty} = \frac{۱}{R_۱} \Rightarrow R_{eq} = R_۱$

گروه آموزشی ماز

۳۰ **نمودار ولتاژ ـ جریان یک باتری مطابق شکل (الف) است. اگر این باتری را بین نقاط A و B در شکل (ب) ببندیم، در هر ثانیه چند کولن بار الکتریکی به طور خالص از هر مقطع مقاومت $R_۲$ می‌گذرد؟**



(الف)



(ب)

۱) ۱

۲) $\frac{۷}{۲}$

۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) $\frac{۷}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ نموداری ـ ۱۱۰۲)

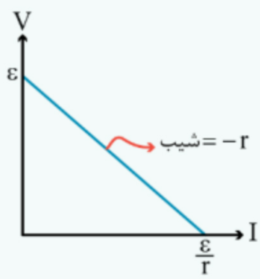
ولتاژ باتری

۱ـ معادلهٔ ولتاژ ـ جریان یک باتری مولد به‌صورت زیر است:

$$V_{باتری} = \varepsilon - rI$$

در رابطهٔ فوق، ε برابر نیروی محرکهٔ باتری و r برابر مقاومت داخلی آن است.

۲ـ مطابق رابطهٔ $V_{باتری} = \varepsilon - rI$ ، نمودار ولتاژ ـ جریان یک باتری مولد مطابق شکل زیر است.



۳ـ در مورد نمودار ولتاژ ـ جریان باتری به نکات زیر توجه کنید:

الف: بیشینهٔ ولتاژ باتری مولد برابر نیروی محرکهٔ آن است.

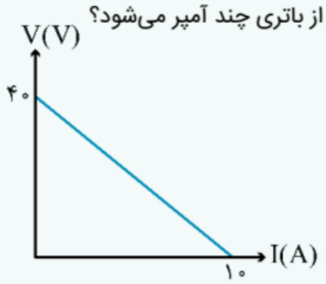
ب: اندازهٔ شیب نمودار برابر مقاومت درونی باتری است.

ج: عرض از مبدأ نمودار برابر ε و طول از مبدأ آن برابر $\frac{\varepsilon}{r}$ است.

د: بیشینهٔ جریان خروجی از باتری برابر $\frac{\varepsilon}{r}$ است که به آن جریان اتصال کوتاه باتری می‌گوییم.

مثال:

نمودار ولتاژ ـ جریان یک باتری مطابق شکل است. اگر یک مقاومت ۶ اهمی را به دو سر این باتری وصل کنیم، جریان خروجی از باتری چند آمپر می‌شود؟



این سؤال را در گام‌های زیر حل می‌کنیم.

گام اول: مطابق نمودار داده شده داریم:

$$\begin{cases} \text{عرض از مبدأ} : \varepsilon = ۴۰V \\ \text{طول از مبدأ} : \dfrac{\varepsilon}{r} = ۱۰ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \varepsilon = ۴۰V \\ r = ۴\Omega \end{cases}$$

گام دوم: با اتصال مقاومت ۶Ω به باتری، جریان مدار برابر است با:

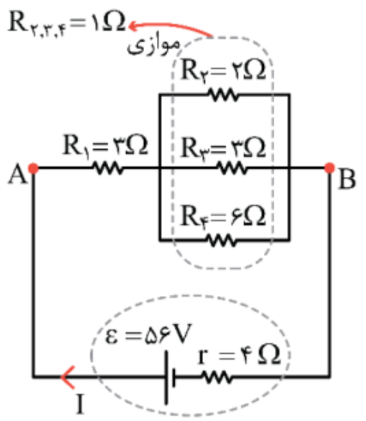
$$I = \frac{\varepsilon}{r+R} = \frac{۴۰}{۴+۶} = ۴A$$

گام اول:

هنگام عبور جریان $۶A$ از باتری، ولتاژ باتری $۳۲V$ است و هنگام عبور جریان $۱۴A$ از باتری، ولتاژ باتری صفر می‌شود، بنابراین:

$$V = \varepsilon - rI \rightarrow \begin{cases} ۳۲ = \varepsilon - ۶r \\ ۰ = \varepsilon - ۱۴r \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r = ۴\Omega \\ \varepsilon = ۵۶V \end{cases}$$

گام دوم:



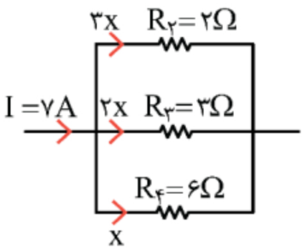
با بستن باتری بین نقاط A و B، جریان خروجی از آن برابر می‌شود با:

$$R_{eq} = R_۱ + R_{۲,۳,۴} = ۳ + ۱ = ۴\Omega$$

$$I = \frac{\varepsilon}{r + R_{eq}} = \frac{۵۶}{۴+۴} = ۷A$$

گام سوم:

جریان $I = ۷A$ را بین سه مقاومت موازی تقسیم می‌کنیم. اگر جریان گذرنده از مقاومت ۶Ω، برابر x باشد، جریان گذرنده از مقاومت ۳Ω برابر $۲x$ و جریان عبوری از مقاومت ۲Ω برابر $۳x$ است، زیرا در مقاومت‌های موازی، جریان با مقدار مقاومت رابطهٔ عکس دارد.



$$I = x + ۲x + ۳x$$

$$\rightarrow ۷ = ۶x \rightarrow x = \frac{۷}{۶}A \rightarrow R_۲ \text{ جریان عبوری از مقاومت } : ۳x = \frac{۷}{۲}A$$

دقت کنید که مقدار بار الکتریکی گذرنده در هر ثانیه در واقع همان جریان الکتریکی است.

۳۱ **مقاومت الکتریکی اتوی شکل زیر برابر .... اهم است و سیم متصل به آن باید بتواند حداقل جریان .... آمپر را از خود عبور دهد.**

۱) ۴ و ۴

۲) ۴ و ۸

۳) ۵۵ و ۴

۴) ۵۵ و ۸

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

توان مصرفی

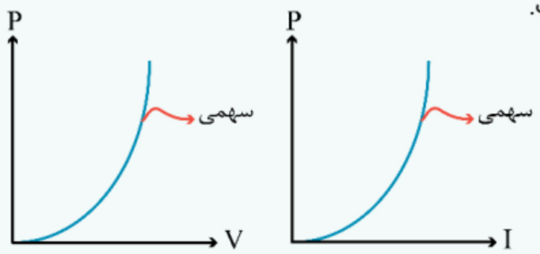
۱ـ توان الکتریکی هر وسیلهٔ الکتریکی برابر حاصل‌ضرب اختلاف پتانسیل در سر آن وسیله در جریان عبوری از آن وسیله است.

$$P = VI$$

۲ـ برای یک مقاومت اهمی با توجه به رابطهٔ $V = RI$ ، توان مصرفی مقاومت از روابط زیر قابل محاسبه است.

$P = VI \, , \, P = RI^{۲} \, , \, P = \frac{V^{۲}}{R}$: توان مصرفی مقاومت

۳ـ نمودار توان مصرفی در یک مقاومت بر حسب ولتاژ و جریان عبوری از آن مطابق شکل‌های زیر است.



گام اول:

مقاومت الکتریکی برابر است با:

$$P = \frac{V^{۲}}{R} \rightarrow ۸۸۰ = \frac{(۲۲۰)^{۲}}{R} \rightarrow R = ۵۵\Omega$$

گام دوم:

جریان الکتریکی عبوری برابر است با:

$$P = VI \rightarrow ۸۸۰ = ۲۲۰ \cdot I \rightarrow I = ۴A$$

گروه آموزشی ماز

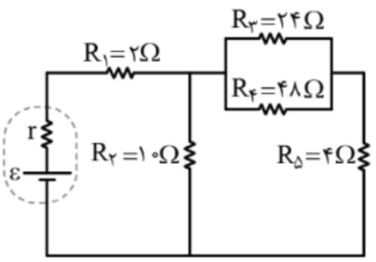
۳۲ **در مدار شکل زیر، مقاومت .... کمترین توان را مصرف می‌کند و ولتاژ دو سر مقاومت .... بیشتر از سایر مقاومت‌های مدار است.**

۱) $R_۴$ و $R_۲$

۲) $R_۵$ و $R_۲$

۳) $R_۵$ و $R_۱$

۴) $R_۴$ و $R_۱$



پاسخ: گزینه ۲ (سخت ـ مفهومی و محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

توان مصرفی

۱ـ برای مقایسهٔ توان مصرفی در مقاومت‌های یک مدار، ابتدا جریان آن‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم. در مقایسهٔ جریان‌ها به نکات زیر توجه می‌کنیم.

الف: جریان مقاومت‌های متوالی با هم برابر است.

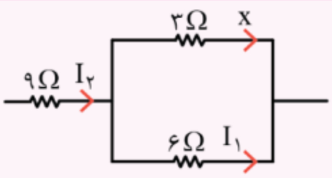
ب: جریان مقاومت‌های موازی با اندازهٔ مقاومت رابطهٔ عکس دارد.

ج: برای مقایسهٔ جریان‌ها، جریان یکی از شاخه‌های مدار را برابر x در نظر می‌گیریم و جریان سایر قسمت‌ها را برحسب x به‌دست می‌آوریم.

برای آن‌که نکتهٔ بالا واضح‌تر شود، بهتر است قبل از این‌که به حل این تست بپردازیم، چند تمرین زیر را حل کنیم.

تمرین

در مدار مقابل، اگر جریان مقاومت ۳Ω برابر x باشد، جریان سایر مقاومت‌ها را بر حسب x به‌دست آورید.



همان‌طور که یاد گرفتید در مقاومت‌های موازی، جریان با اندازهٔ مقاومت رابطهٔ عکس دارد، بنابراین می‌توان نوشت:

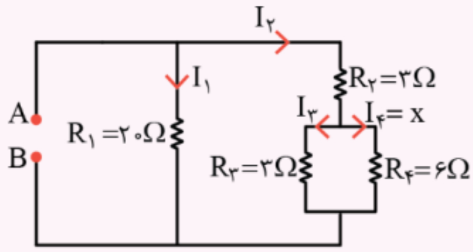
$$\frac{\text{جریان مقاومت } ۶\Omega}{\text{جریان مقاومت } ۳\Omega} = \frac{۳}{۶} \rightarrow \frac{I_۱}{x} = \frac{۳}{۶} \rightarrow I_۱ = \frac{x}{۲}$$

همچنین جریان مقاومت ۹Ω برابر مجموع جریان‌های مقاومت‌های ۳Ω و ۶Ω است، بنابراین داریم:

$$I_۲ = x + \frac{x}{۲} = \frac{۳x}{۲}$$

تمرین

در مدار مقابل، اگر جریان مقاومت ۶Ω برابر x باشد، جریان سایر مقاومت‌ها را بر حسب x به‌دست آورید.



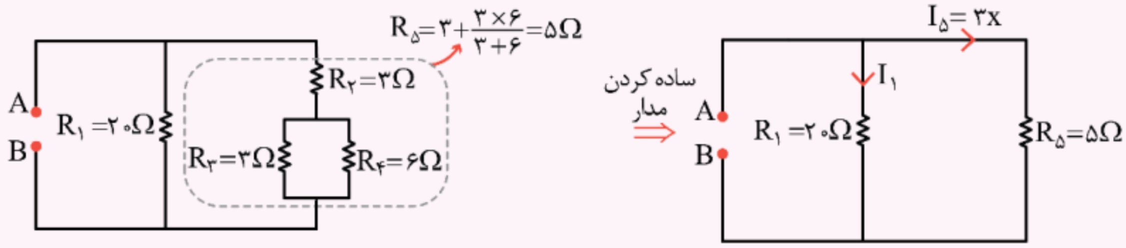
مقاومت‌های $R_۳$ و $R_۴$ با هم موازی هستند، بنابراین داریم:

$$\frac{I_۳}{I_۴}=\frac{R_۴}{R_۳}\rightarrow\frac{I_۳}{x}=\frac{۶}{۳}\rightarrow I_۳=۲x$$

جریان $I_۲$ برابر مجموع $I_۳$ و $I_۴$ است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$I_۲=I_۳+I_۴=۲x+x=۳x$$

برای به‌دست آوردن جریان $I_۱$ راه سخت‌تری در پیش داریم. برای این کار ابتدا سمت راست مدار را ساده می‌کنیم. مقاومت‌های $R_۳$ و $R_۴$ موازی هستند و حاصل آن‌ها با $R_۲$ متوالی است، بنابراین داریم:



در نهایت چون مقاومت‌های $R_۱$ و $R_۵$ موازی هستند، می‌توانیم جریان $I_۱$ را هم بر حسب x به‌دست آوریم.

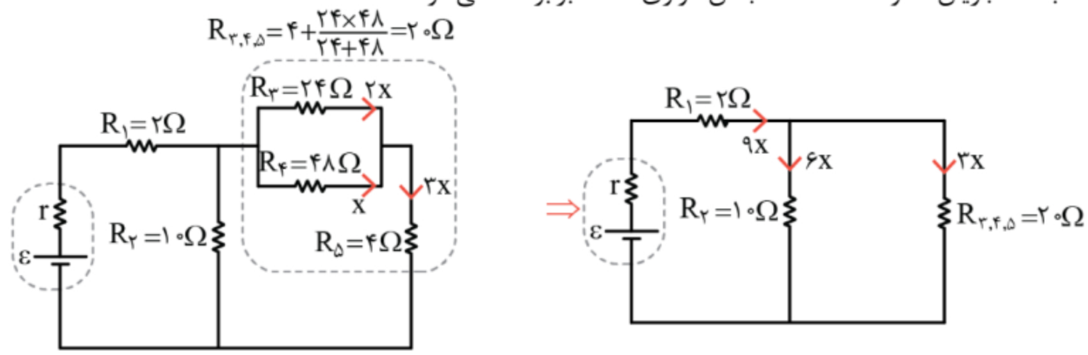
$$\frac{I_۱}{I_۵}=\frac{R_۵}{R_۱}\rightarrow\frac{I_۱}{۳x}=\frac{۵}{۲۰}\rightarrow I_۱=\frac{۳}{۴}x$$

۲ـ در قسمت قبل یاد گرفتیم که چگونه جریان مقاومت‌های مدار را مقایسه کنیم. پس از مقایسهٔ جریان‌ها، می‌توانیم به راحتی و با استفاده از رابطهٔ $P=RI^۲$، توان مقاومت‌ها را هم با یکدیگر مقایسه کنیم.

$$P=RI^۲\rightarrow\frac{P_۲}{P_۱}=\frac{R_۲}{R_۱}\times\left(\frac{I_۲}{I_۱}\right)^۲$$

پاسخ تشریحی:

اگر فرض کنیم جریان مقاومت ۴۸Ω برابر x باشد، جریان مقاومت ۲۴Ω که با آن موازی است، برابر $۲x$ می‌شود.



در مدار سمت راست، چون مقاومت $R_۲=۱۰\Omega$ نصف مقاومت $R_{۳,۴,۵}=۲۰\Omega$ است، جریان گذرنده از آن ۲ برابر جریان مقاومت $R_{۳,۴,۵}$، یعنی برابر $۶x$ است.

برای مقایسهٔ توان مصرفی مقاومت‌ها می‌توان نوشت:

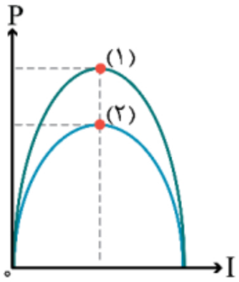
$$P=RI^۲\rightarrow\begin{cases}P_۱=۲\times(۹x)^۲=۱۶۲x^۲\\P_۲=۱۰\times(۶x)^۲=۳۶۰x^۲\\P_۳=۲۴\times(۲x)^۲=۹۶x^۲\\P_۴=۴۸\times(x)^۲=۴۸x^۲\\P_۵=۴\times(۳x)^۲=۳۶x^۲\end{cases}$$

بنابراین کمترین توان الکتریکی در مقاومت R_5 مصرف می‌شود. برای مقایسهٔ اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت‌ها هم قانون اهم را به کار می‌بریم.

$$V = RI \rightarrow \begin{cases} V_1 = 2\times 9x = 18x \\ V_2 = 10\times 6x = 60x \\ V_3 = 24\times 2x = 48x \\ V_4 = 48\times x = 48x \\ V_5 = 4\times 3x = 12x \end{cases}$$

اختلاف پتانسیل الکتریکی دو سر مقاومت R_2 بیشتر از سایر مقاومت‌هاست.

۲۳ نمودار توان خروجی از دو باتری بر حسب جریان خروجی از آن مطابق شکل است. اگر نیروی محرکهٔ باتری‌ها برابر ε_1 و ε_2 و مقاومت درونی آن‌ها برابر r_1 و r_2 باشد، کدام مقایسه صحیح است؟



۱) $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ و $r_1 > r_2$

۲) $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ و $r_1 = r_2$

۳) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ و $r_1 > r_2$

۴) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ و $r_1 = r_2$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ نموداری ـ ۱۱۰۲)

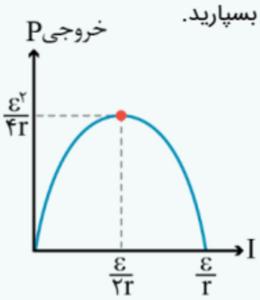
مدار الکتریکی

۱ـ توان خروجی از یک مولد محرکه از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} P = VI \\ V = \varepsilon - rI \end{cases} \rightarrow P = \varepsilon I - rI^2$$

به عبارتی می‌توان گفت که باتری توان εI را تولید می‌کند و مقدار rI^2 در مقاومت داخلی آن تلف می‌شود.

۲ـ نمودار توان خروجی از یک باتری بر حسب جریان عبوری از آن، به صورت یک سهمی است و توصیه می‌شود این نمودار را هم به خاطر بسپارید.



$$P = \varepsilon I - rI^2$$

$$\rightarrow \text{رأس سهمی:} \begin{cases} I = \dfrac{\varepsilon}{2r} \\ P = \dfrac{\varepsilon^2}{4r} \end{cases}$$

۳ـ همان‌طور که در نمودار بالا می‌بینید، توان خروجی از یک باتری زمانی بیشینه می‌شود که جریان آن برابر $\frac{\varepsilon}{2r}$ باشد. مقدار این توان بیشینه برابر $\frac{\varepsilon^2}{4r}$ است.

پاسخ تشریحی:

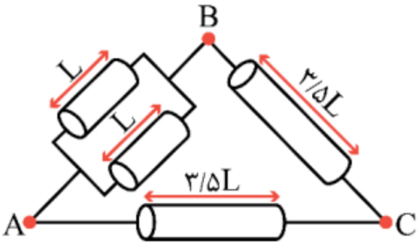
با توجه به نکتهٔ فوق داریم:

$$\frac{\varepsilon_1}{2r_1} = \frac{\varepsilon_2}{2r_2} \rightarrow \frac{\varepsilon_1}{r_1} = \frac{\varepsilon_2}{r_2} \quad (1)$$: جریان در رأس سهمی برابر است.

$$\frac{\varepsilon_1^2}{4r_1} > \frac{\varepsilon_2^2}{4r_2} \rightarrow \frac{\varepsilon_1^2}{r_1} > \frac{\varepsilon_2^2}{r_2}$$: توان در رأس سهمی برای باتری (۱) بزرگ‌تر است.

$$\rightarrow \varepsilon_1 \times \frac{\varepsilon_1}{r_1} > \varepsilon_2 \times \frac{\varepsilon_2}{r_2} \xrightarrow{\text{رابطهٔ (1)}} \varepsilon_1 > \varepsilon_2 \rightarrow r_1 > r_2$$

۳۴ در مدار شکل زیر، همهٔ مقاومت‌ها استوانه‌هایی توپر و هم‌جنس با سطح مقطع برابر هستند. یک باتری با نیروی محرکهٔ $۲۱V$ و مقاومت داخلی ۷Ω را یک بار بین نقاط A و B و بار دیگر بین نقاط A و C می‌بندیم و توان خروجی از باتری در هر دو حالت برابر است. جریان خروجی از باتری در حالت اول چند آمپر است؟



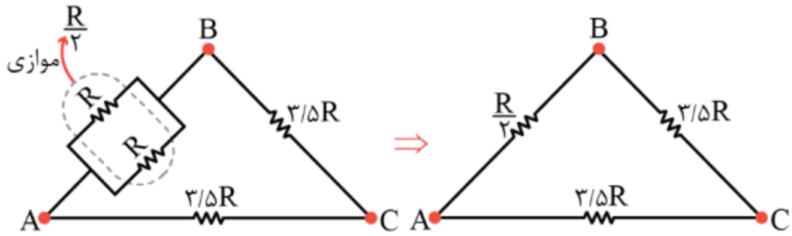
۱) ۲
۲) ۱
۳) ۱/۵
۴) ۳/۵

پاسخ: گزینه ۱ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۲)

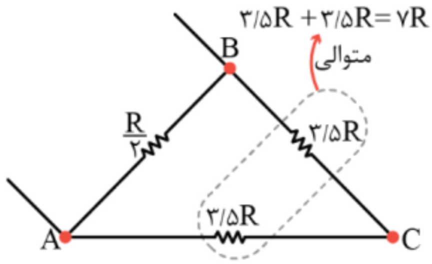
نکته:
اگر به ازای دو مقاومت معادل $R_۱$ و $R_۲$، توان خروجی از باتری یکسان باشد، آن‌گاه مقاومت درونی باتری از رابطهٔ $r=\sqrt{R_۱R_۲}$ به‌دست می‌آید.

پاسخ تشریحی:

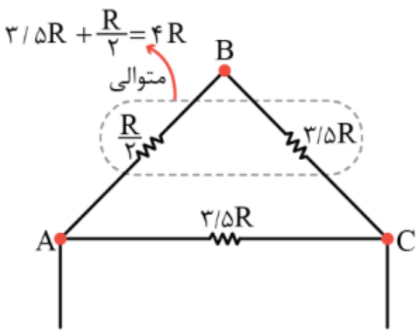
با توجه به این‌که جنس و سطح مقطع سیم‌ها یکسان است، مقاومت آن‌ها فقط متناسب با طول آن‌هاست، پس می‌توان مدار را به شکل زیر رسم کرد.



حال یک بار مقاومت معادل بین نقاط A و B و بار دیگر مقاومت معادل بین نقاط A و C را محاسبه می‌کنیم.



$$R_{AB}=\frac{\frac{R}{۲}\times ۷R}{\frac{R}{۲}+۷R}=\frac{۷}{۱۵}R$$



$$R_{AC}=\frac{۴R\times ۳/۵R}{۴R+۳/۵R}=\frac{۲۸}{۱۵}R$$

با توجه به این‌که توان خروجی باتری در دو حالت یکسان است، داریم:

$$r=\sqrt{R_{AB}R_{AC}}\rightarrow ۷=\sqrt{\frac{۷}{۱۵}R\times\frac{۲۸}{۱۵}R}$$

$$\rightarrow ۷=\frac{۱۴}{۱۵}R\rightarrow R=۷/۵\Omega$$

بنابراین جریان خروجی از باتری در حالت اول برابر است با:

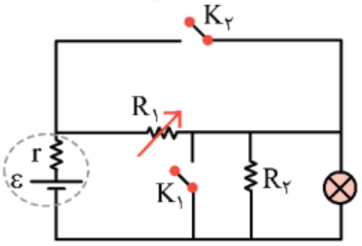
$$I=\frac{\varepsilon}{r+R_{AB}}\rightarrow I=\frac{۲۱}{۷+\frac{۷}{۱۵}\times ۷/۵}=\frac{۲۱}{۷+۳/۵}=\frac{۲۱}{۱۰/۵}=۲A$$

۲۵ به ترتیب از راست به چپ، چه تعداد از تغییرات زیر باعث افزایش نور لامپ می‌شوند و چه تعداد از آن‌ها ولتاژ دو سر باتری را کاهش می‌دهند؟

الف: کاهش مقاومت R_1

ب: بستن کلید K_1

ج: بستن کلید K_2



۱) ۱ و ۲ ۲) ۱ و ۳ ۳) ۲ و ۳ ۴) ۲ و ۲

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۱۰۲)

بررسی تغییر در مدارهای الکتریکی

در این درسنامه به بررسی سؤالاتی می‌پردازیم که در آن‌ها مقدار یک مقاومت تغییر می‌کند یا کلیدی باز یا بسته می‌شود و اثر این تغییرات بر مقادیر ولت‌سنج‌ها و آمپرسنج‌ها و یا نور لامپ‌ها از ما پرسیده می‌شود. برای حل این نوع از سؤالات می‌توانیم گام‌های زیر را طی کنیم.

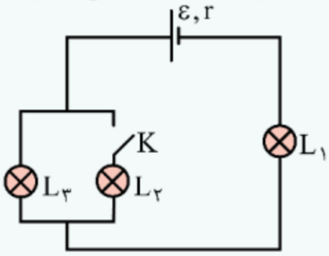
۱ـ تعیین می‌کنیم مقاومت معادل مدار چگونه تغییر کرده است.

۲ـ با توجه به نتیجهٔ گام قبل، تعیین می‌کنیم جریان خروجی از باتری چگونه تغییر می‌کند.

۳ـ با مشخص شدن تغییرات جریان باتری، تغییر نور برخی از لامپ‌ها و یا تغییرات اعداد برخی از ولت‌سنج‌ها و آمپرسنج‌های مدار مشخص می‌شود. برای تعیین تغییرات نور لامپ‌های دیگر و مقادیر سایر ولت‌سنج‌ها و آمپرسنج‌ها ولتاژ باتری را بررسی می‌کنیم.

برای آن‌که روش بالا به‌طور کامل واضح شود، دو مثال زیر را حل می‌کنیم. مثال اول مربوط به نور لامپ‌ها است و مثال دوم مربوط به تغییرات اعداد ولت‌سنج و آمپرسنج است.

مثال: در مدار مقابل با بستن کلید K، نور لامپ‌های L_1 و L_3 چگونه تغییر می‌کند؟



برای حل این سؤال گام‌های زیر را طی می‌کنیم.

گام ۱: با بستن کلید K، دو لامپ با هم موازی می‌شوند و در نتیجه مقاومت معادل مدار کاهش می‌یابد.

گام ۲: با کاهش مقاومت معادل مدار، جریان خروجی از باتری زیاد می‌شود. چون جریان باتری به‌طور کامل از لامپ L_1 می‌گذرد، با افزایش جریان، نور L_1 هم زیاد می‌شود.

گام ۳: جریان کل مدار زیاد شده است، ولی این جریان با بسته شدن کلید باید بین دو لامپ L_2 و L_3 تقسیم شود، بنابراین با کمک جریان نمی‌توانیم تغییرات نور لامپ L_3 را بررسی کنیم. برای این کار از تغییرات ولتاژ باتری در مدار کمک می‌گیریم.

$$V_{\text{باتری}} = \varepsilon - rI\uparrow \rightarrow V_{\text{باتری}}\downarrow$$

$$\downarrow V_{\text{باتری}} = \uparrow V_{L_1} + V_{L_3} \rightarrow V_{L_3}\downarrow$$

بنابراین نور لامپ L_3 با کاهش ولتاژ آن کم شده است. راه‌حل این مثال را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

$$\text{بستن کلید } K \Rightarrow R_{eq}\downarrow \Rightarrow I_t\uparrow \Rightarrow L_1 \text{ پرنورتر}$$

$$I_t\uparrow \Rightarrow V_{\text{باتری}}\downarrow \Rightarrow V_{L_3}\downarrow \Rightarrow L_3 \text{ کم‌نورتر}$$

بررسی موارد:

الف: کاهش مقاومت R_1 باعث کاهش مقاومت معادل مدار و در نتیجه افزایش جریان مدار می‌شود، بنابراین لامپ پرنورتر می‌شود. با افزایش جریان مدار، طبق رابطهٔ $V = \varepsilon - rI$، ولتاژ باتری کاهش می‌یابد.

ب: بستن کلید K_1 باعث اتصال کوتاه شدن لامپ و در نتیجه خاموش شدن آن می‌شود. با اتصال کوتاه شدن لامپ و مقاومت R_2، مقاومت معادل مدار کاهش می‌یابد، جریان مدار افزایش می‌یابد و در نتیجه ولتاژ باتری کم می‌شود.

ج: بستن کلید K_2 باعث اتصال کوتاه شدن مقاومت R_1 و در نتیجه کاهش مقاومت معادل مدار می‌شود، بنابراین جریان خروجی از باتری افزایش می‌یابد، نور لامپ زیاد می‌شود و ولتاژ باتری کاهش می‌یابد.

اگر...

اگر با ثابت ماندن مقاومت رئوستا، مقاومت R_2 را کاهش دهیم، نور لامپ چگونه تغییر می‌کند؟

پاسخ: با کاهش مقاومت R_2، مقاومت معادل مدار کم می‌شود و جریان خروجی از باتری افزایش می‌یابد. در این حالت از ولتاژ باتری کمک می‌گیریم:

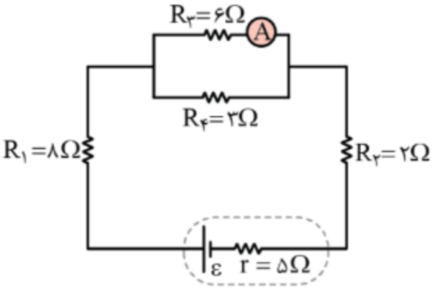
$$V_{\text{باتری}} = \varepsilon - rI \xrightarrow{\uparrow I} V_{\text{باتری}}\downarrow$$

$$V_{R_1} = R_1 I \xrightarrow{\uparrow I} V_{R_1} \uparrow$$

$$V_{\text{باتری}} = V_{R_1} + V_{\text{لامپ}} \xrightarrow[\downarrow V_{\text{باتری}}]{\uparrow V_{R_1}} V_{\text{لامپ}} \downarrow$$

با کاهش ولتاژ لامپ، نور آن کم می‌شود.

۲۶ **اگر در مدار شکل زیر، به جای مقاومت $R_4 = 3\Omega$، یک مقاومت ۶ اهمی را قرار دهیم، به ترتیب از راست به چپ عددی که آمپرسنج آرمانی نشان می‌دهد و توان خروجی باتری چگونه تغییر می‌کند؟**



۱) افزایش ـ افزایش
۲) افزایش ـ کاهش
۳) کاهش ـ کاهش
۴) کاهش ـ افزایش

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۱۰۲)

گام اول:

بررسی تغییر عددی که آمپرسنج آرمانی نشان می‌دهد:

با افزایش مقاومت R_4 (از 3Ω به 6Ω)، مقاومت معادل کل مدار (R_{eq}) افزایش می‌یابد، در نتیجه طبق رابطهٔ $I = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r}$، جریان کل عبوری از مدار کاهش می‌یابد. با کاهش جریان کل عبوری از مدار، طبق رابطهٔ اختلاف پتانسیل دو سر مولد، یعنی $V = \varepsilon - rI$، اختلاف پتانسیل دو سر مولد (V) افزایش می‌یابد.
اختلاف پتانسیل دو سر مولد برابر با مجموع اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R_1، R_2 و مقاومت معادل حاصل از دو مقاومت موازی R_3 و R_4 است.
$(V_{\text{باتری}} = V_{R_1} + V_{R_2} + V_{R_3,R_4})$
با کاهش جریان کل عبوری از مدار، به دلیل عبور این جریان از مقاومت‌های R_1 و R_2، اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت‌های R_1 (V_{R_1}) و R_2 (V_{R_2}) طبق رابطهٔ قانون اهم کاهش می‌یابد:

$$V_{R_1} = R_1 I \xrightarrow{R_1:\text{ثابت} ,\ I:\text{کاهش}} V_{R_1}\ :\text{کاهش}$$

$$V_{R_2} = R_2 I \xrightarrow{R_2:\text{ثابت} ,\ I:\text{کاهش}} V_{R_2}\ :\text{کاهش}$$

بنابراین اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت معادل حاصل از دو مقاومت موازی R_3 و R_4 (V_{R_3,R_4})، طبق رابطهٔ زیر افزایش می‌یابد:

$$V_{\text{باتری}} = V_{R_1} + V_{R_2} + V_{R_3,R_4} \xrightarrow[V_{\text{باتری}}:\text{افزایش}]{V_{R_1}:\text{کاهش} ,\ V_{R_2}:\text{کاهش}} V_{R_3,R_4}\ :\text{افزایش}$$

اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت معادل حاصل از دو مقاومت موازی R_3 و R_4 (V_{R_3,R_4})، با اختلاف پتانسیل دو سر هر یک از مقاومت‌های R_3 (V_{R_3}) و R_4 (V_{R_4}) برابر است، بنابراین با افزایش اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت معادل حاصل از دو مقاومت موازی R_3 و R_4، اختلاف پتانسیل دو سر هر یک از مقاومت‌های R_3 و R_4 نیز افزایش می‌یابد.
آمپرسنج آرمانی جریان عبوری از مقاومت R_3 را نشان می‌دهد (I_3)، در نتیجه طبق قانون اهم، عددی که آمپرسنج آرمانی نشان می‌دهد، افزایش می‌یابد.

$$V_{R_3} = R_3 I_3 \xrightarrow{V_{R_3}:\text{افزایش} ,\ R_3:\text{ثابت}} I_3\ :\text{افزایش}$$

گام دوم:

بررسی تغییر توان خروجی باتری:

در ابتدا دو مقاومت $R_3 = 6\Omega$ و $R_4 = 3\Omega$ با یکدیگر موازی‌اند و مقاومت معادل حاصل از این دو $(R_{3,4})$ برابر است با:

$$R_{3,4} = \frac{R_3 \times R_4}{R_3 + R_4} \xrightarrow[R_4=3\Omega]{R_3=6\Omega} R_{3,4} = \frac{6 \times 3}{6+3} = 2\Omega$$

مقاومت معادل حاصل از دو مقاومت موازی R_3 و R_4 $(R_{3,4})$ با مقاومت‌های R_1 و R_2 متوالی بوده و مقاومت معادل کل مدار (R_{eq}) برابر است با:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_{3,4} \xrightarrow[R_{3,4}=2\Omega]{R_1=8\Omega ,\ R_2=2\Omega} R_{eq} = 8 + 2 + 2 = 12\Omega$$

در ادامه مقاومت معادل کل مدار (R_{eq})، بعد از جایگزین کردن مقاومت ۶ اهمی به جای $R_4 = 3\Omega$ را محاسبه می‌کنیم.

دو مقاومت $R_{۳} = ۶\Omega$ و $R_{۴} = ۶\Omega$ با یکدیگر موازی‌اند و مقاومت معادل حاصل از این دو $(R_{۳,۴})$ برابر است با:

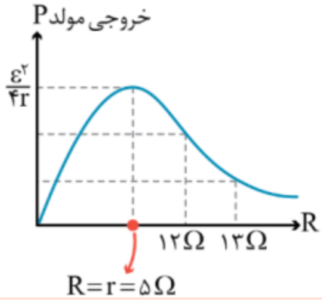
$$R_{۳,۴} = \frac{R_{۳} \times R_{۴}}{R_{۳} + R_{۴}} \xrightarrow[R_{۴}=۶\Omega]{R_{۳}=۶\Omega} R_{۳,۴} = \frac{۶ \times ۶}{۶ + ۶} = ۳\Omega$$

مقاومت معادل حاصل از دو مقاومت موازی $R_{۳}$ و $R_{۴}$ $(R_{۳,۴})$ با مقاومت‌های $R_{۱}$ و $R_{۲}$ متوالی بوده و مقاومت معادل کل مدار (R_{eq}) برابر است با:

$$R_{eq} = R_{۱} + R_{۲} + R_{۳,۴} \xrightarrow[R_{۳,۴}=۳\Omega]{R_{۱}=۸\Omega\ ,\ R_{۲}=۲\Omega} R_{eq} = ۸ + ۲ + ۳ = ۱۳\Omega$$

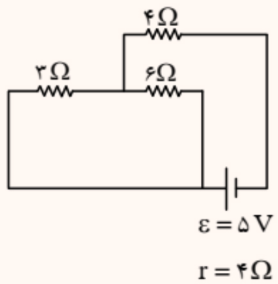
پس با این تغییر، مقاومت معادل کل مدار از ۱۲Ω به ۱۳Ω رسیده است.

طبق نمودار توان خروجی مولد، بر حسب مقاومت معادل مدار، با افزایش مقاومت معادل کل مدار از ۱۲Ω به ۱۳Ω، توان خروجی مولد کاهش پیدا کرده است.



کنکور سراسری ریاضی خارج ۱۴۰۱:

در مدار زیر، اگر به جای مقاومت ۳Ω، مقاومت ۱۲Ω قرار گیرد، توان تولیدی باتری چند وات تغییر می‌کند؟



۱) $\frac{۵}{۱۲}$

۲) $\frac{۵}{۶}$

۳) $\frac{۱۰۰}{۹}$

۴) $\frac{۱۰۰}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

توان تولیدی باتری در مقاومت داخلی آن و مقاومت معادل خارجی مدار مصرف می‌شود. در ابتدا دو مقاومت ۳Ω و ۶Ω باهم موازی و معادل آن‌ها با مقاومت ۴Ω متوالی است.

مقاومت معادل مدار برابر است با:

$$R_{eq} = \frac{۳ \times ۶}{۳ + ۶} + ۴ \Rightarrow R_{eq} = ۶\Omega$$

بنابراین داریم:

$$P_{\text{تولیدی}} = \frac{\varepsilon^۲}{R_{eq} + r} = \frac{۲۵}{۶ + ۴} = \frac{۲۵}{۱۰} = \frac{۵}{۲} W$$

با جایگزین کردن مقاومت ۳Ω با مقاومت ۱۲Ω، داریم:

$$R'_{eq} = \frac{۱۲ \times ۶}{۱۲ + ۶} + ۴ \Rightarrow R'_{eq} = ۸\Omega$$

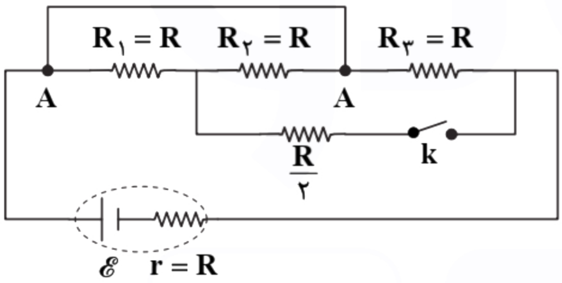
$$P'_{\text{تولیدی}} = I' = \frac{\varepsilon^۲}{R'_{eq} + r} = \frac{۲۵}{۸ + ۴} = \frac{۲۵}{۱۲} W$$

بنابراین:

$$\Delta P = P_{\text{تولیدی}} - P'_{\text{تولیدی}} = \frac{۵}{۲} - \frac{۲۵}{۱۲} = \frac{۵}{۱۲} W$$

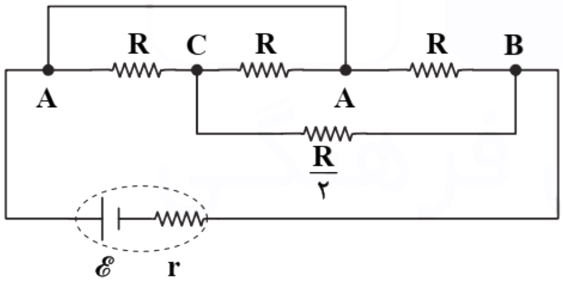
۳۷ پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار ＊ فیزیک ۲ (فصل ۲)

در حالت اول و قبل از بستن کلید، مدار مطابق شکل است:

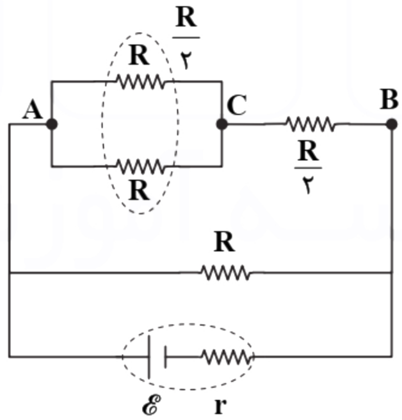


از سیمی که کلید در آن وجود دارد در صورت باز بودن کلید، جریانی عبور نمی‌کند و مقاومت در آن سیم حذف می‌شود، از طرفی دو مقاومت R_2 و R_1 نیز اتصال کوتاه شده و از مدار حذف می‌شوند، پس مقاومت معادل در حالت اول می‌شود: $R_{eq}=R$

در حالت دوم و پس از بستن کلید، مدار مطابق شکل زیر می‌شود:



$\Rightarrow$



دو مقاومت متوالی در شاخهٔ بالایی: $\frac{R}{2}+\frac{R}{2}=R$

$$\frac{1}{R'_{eq}}=\frac{1}{R}+\frac{1}{R}\Rightarrow R'_{eq}=\frac{R}{2}$$

نسبت توان خروجی مولد به توان تولیدی آن را به‌صورت بازده مولد و با نماد Ra نشان می‌دهیم، بنابراین داریم:

$$Ra_{(1)}=\frac{R_{eq}I^2}{\mathcal{E}I}=\frac{R_{eq}\left(\frac{\mathcal{E}}{R_{eq}+r}\right)}{\mathcal{E}}=\frac{R_{eq}}{R_{eq}+r}\xrightarrow{R_{eq}=R}Ra_{(1)}=\frac{R}{R+R}=\frac{1}{2}\Rightarrow (\text{برحسب درصد})\,Ra_{(1)}=\%50$$

به‌طور مشابه داریم:

$$Ra_{(2)}=\frac{\frac{R}{2}}{\frac{R}{2}+R}=\frac{1}{3}\Rightarrow (\text{برحسب درصد})\,Ra_{(2)}\simeq\%33$$

تغییرات درصد بازده مولد برابر است با: $Ra_{(2)}-Ra_{(1)}=-\%17$ (برحسب درصد)

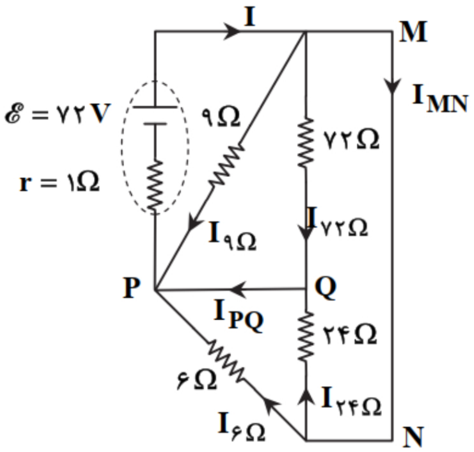
۳۸ پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار ＊ فیزیک ۲ (فصل ۲)

در ابتدا با توجه به نقطه‌گذاری متوجه می‌شویم که تمام مقاومت‌ها با یکدیگر موازی هستند. مقاومت معادل را به‌دست آوریم:

$$\frac{1}{R_{eq}}=\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{72}+\frac{1}{24}\Rightarrow R_{eq}=3\Omega$$

$$I=\frac{\mathcal{E}}{R_{eq}+r}=\frac{72}{3+1}\Rightarrow I=18\,A$$

در مقاومت‌های موازی، جریان به نسبت عکس مقاومت‌ها تقسیم می‌شود:



$$\frac{I_{9\Omega}}{I}=\frac{R_{eq}}{9}\Rightarrow I_{9\Omega}=\frac{18\times3}{9}=6\,A\quad,\quad I_{72\Omega}=\frac{18\times3}{72}=\frac{3}{4}A$$

$$I=I_{9\Omega}+I_{72\Omega}+I_{MN}\Rightarrow I_{MN}=12-\frac{3}{4}=\frac{45}{4}A$$

$$I_{24\Omega}=\frac{18\times3}{24}=\frac{9}{4}A\Rightarrow I_{PQ}=3\,A$$

۳۹ پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۲)

$$R = \frac{V^۲}{P}$$

$$\left.\begin{aligned} R_۱ &= \frac{۲۰۰\times۲۰۰}{۶۰} = \frac{۲۰۰۰}{۳}\Omega \\ R_۲ &= \frac{۲۰۰\times۲۰۰}{۱۲۰} = \frac{۱۰۰۰}{۳}\Omega \\ R_۳ &= \frac{۲۰۰\times۲۰۰}{۳۰} = \frac{۴۰۰۰}{۳}\Omega \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{۱}{R_{۱,۳}} = \frac{۱}{R_۱} + \frac{۱}{R_۳} = \frac{۳}{۲۰۰۰} + \frac{۳}{۴۰۰۰} \Rightarrow R_{۱,۳} = \frac{۴۰۰۰}{۹}\Omega$$

$$R_{eq} = R_{۱,۳} + R_۲ = \frac{۴۰۰۰}{۹} + \frac{۱۰۰۰}{۳} = \frac{۷۰۰۰}{۹}\Omega$$

$$V = IR_{eq} \Rightarrow I = \frac{۳۰۰\times۹}{۷۰۰۰} \Rightarrow I = \frac{۲۷}{۷۰}A$$

$$P_{\text{کل}} = R_{eq}I^۲ = \frac{۷۰۰۰}{۹}\times(\frac{۲۷}{۷۰})^۲ = \frac{۸۱۰}{۷}W$$

۴۰ پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۲ (فصل ۲)

ولت‌سنج $V_۲$ ولتاژ دو سر باتری را نشان می‌دهد. بنابراین: $V_۲ = \mathcal{E}$

$$V_۲ = R_۱I_۱ \xrightarrow[R_۱=\text{ثابت}]{V_۲=\mathcal{E}=\text{ثابت}} I_۱ = \text{ثابت}$$

با افزایش $R_۲$، مقاومت معادل مدار افزایش یافته و طبق رابطهٔ $I = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq}}$، جریان کل مدار (و در نتیجه جریان $I_۳$) کاهش می‌یابد. با ثابت بودن ولتاژ دو سر باتری ($\mathcal{E} = V_{R_۲} + V_{R_۳}$) و کاهش ولتاژ دو سر $R_۳$ داریم:

$$V_{R_۳} = R_۳I_۳ \downarrow \Rightarrow \downarrow V_{R_۳}$$

$$\mathcal{E}_{\text{ثابت}} = V_۱ + \underbrace{V_{R_۳}}_{\text{کاهش}} \Rightarrow \uparrow V_۱$$